

**Methoden zur rechnergestützten Analyse und
Synthese von Mehrgrößenregelsystemen
in Polynommatrizendarstellung**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Fakultät für Elektrotechnik

der Ruhr-Universität Bochum

von

Ulrich Keuchel

Herne

Bochum 1988



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**Methoden zur rechnergestützten Analyse und
Synthese von Mehrgrößenregelsystemen
in Polynommatrizendarstellung**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Fakultät für Elektrotechnik

der Ruhr-Universität Bochum

von

Ulrich Keuchel

Herne

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am : 31. Mai 1988

Tag der mündlichen Prüfung : 13. Juli 1988

Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Korreferent : Prof. Dr. rer. nat. P. C. Müller

VORWORT

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die Anregung und großzügige Förderung dieser Arbeit sowie für die Gelegenheit zu ihrer Durchführung.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. P. C. Müller gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und für die Übernahme des Mitberichts.

Ferner danke ich allen Kollegen, insbesondere Herrn Dr.-Ing. Chr. Schmid, für die anregenden Diskussionen und kritischen Anmerkungen, die zur Abrundung der Arbeit beigetragen haben. Nicht zuletzt gilt mein Dank Herrn U. Kiffmeier, der als studentische Hilfskraft durch seine Unterstützung bei Programmierarbeit und Versuchsdurchführung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Bochum, im Mai 1988

Ulrich Keuchel

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Begriffserörterungen	5
3. Numerische Methoden zur Analyse und Synthese	11
3.1 Berechnung eines Primmatrixprodukts aus der Zustandsraum- darstellung	15
3.1.1 Definition eines Polynommatrixquotienten in Hermite-Form	15
3.1.2 Transformation einer Zustandsraumbeschreibung auf obere Block-Hessenberg-Form	17
3.1.3 Transformation von Block-Hessenbergform auf Block-Frobenius-Form	20
3.1.4 Berechnung eines Primmatrixprodukts in Hermite-Form aus der Block-Frobenius-Form	22
3.2 Berechnung von größten gemeinsamen Teilern	30
3.2.1 Definition und Konstruktion von größten gemeinsamen Teilern	30
3.2.2 Verallgemeinerte Sylvester-Resultantenmatrizen zur numerischen Berechnung größter gemeinsamer Teiler	32
3.3 Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung	41
3.3.1 Eigenschaften	43
3.3.2 Lösung mittels elementarer Äquivalenz- transformationen	46
3.3.3 Lösung über die Realisierung im Zustandsraum	49
3.3.4 Lösung über eine minimale Basis des Nullraums der Systempolynommatrizen	57

3.4	Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung	69
3.4.1	Eigenschaften	70
3.4.2	Lösung mittels Transformation auf Smith-Form	72
3.4.2	Lösung durch Bilden des Kroneckerprodukts	74
3.4.3	Lösung durch zeilenweise Auswertung	76
3.5	Spektralfaktorisierung von Polynommatrizen	79
3.5.1	Spektralfaktorisierung durch rekursive Choleski-Zerlegung	79
3.5.2	Spektralfaktorisierung mittels der Newton-Raphson-Methode	84
3.6	Berechnung der invarianten Nullstellen einer Polynommatrix	90

4. Parameterschätzung für Mehrgrößenregelstrecken 97

4.1	Modellstruktur und Schätzgleichungen	98
4.2	Die numerische Lösung des Schätzproblems	103

5. Synthese von Regelkreisen 109

5.1	Zustandsregler- und Beobachterentwurf im Frequenzbereich	110
5.2	Entwurf eines robusten Reglers für Führungs- und Störverhalten	119
5.2.1	Das Prinzip des internen Modells	120
5.2.2	Entwurf des Folgereglers im Zustandsraum	124
5.2.3	Entwurf des Folgereglers im Frequenzbereich	126
5.3	Entwurf eines dynamisch entkoppelnden Reglers	133
5.4	Synthese quadratisch optimaler Regelkreise durch Spektralfaktorisierung	138

5.4.1	Berechnung der charakteristischen Polynom- matrix des optimalen Regelkreises	139
5.4.1	Berechnung der charakteristischen Polynom- matrix des optimalen Beobachters	148

6. Erprobung der Regelalgorithmen 150

6.1	Modellbildung, Reglerentwurf und Echtzeitregelung für die Laborregelstrecke Turbogenerator	151
6.1.1	Die Versuchsanlage Turbogenerator	151
6.1.2	Identifikation eines parametrischen Modells	154
6.1.3	Diskussion der Regelergebnisse	158
6.1.3.1	Der proportionale Regler	160
6.1.3.2	Der PI-Regler	163
6.1.3.3	Folgerregler für sprung- und sinusförmige Signale	165
6.1.3.4	Der entkoppelnde Regler	167
6.2	Simulation der Regelung eines Einschnecken- extruders	173
6.2.1	Das Modell des Kunststoffextruders	170
6.2.2	Entwurf eines PI-Reglers für ein redu- ziertes Modell	172

7. Zusammenfassung 177

Literaturverzeichnis 180

Anhang 189

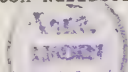
A0	Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole	189
A1	Zusammenhang zwischen Zustandsraumdarstellung und Polynommatrizenbeschreibung	193
A2	Beispiel zur Strukturgleichung Gl. (3.3.3.1.7)	198

A3	Überprüfung der Lösbarkeit der unilateralen diophantischen Gleichung mit dem Nullraumverfahren	200
A4	Der sequentielle QR-Algorithmus	202
A5	Der sequentielle Gauß-Algorithmus	203
A6	Spezifikationen für den Reglerentwurf nach Abschnitt 6.1	205
A7	Modellparameter der Regelstrecke Kunststoffextruder	208

1. Einleitung

Der Reglerentwurf für stark verkoppelte Mehrgrößenregelstrecken durch Vorgabe der Pol- und Nullstellenstruktur für Stör- und Führungsverhalten führt schon bei Problemen geringer Dimension und Ordnung aufgrund der großen Zahl von Systemparametern zu erheblichen regelungstechnischen und mathematischen Problemen für den algebraischen Entwurf. Für lineare Mehrgrößensysteme hat sich die Zustandsraumbeschreibung in der rechnergestützten Analyse und Synthese etabliert. Liegt jedoch die Systembeschreibung der Regelstrecke aufgrund einer vorangehenden Prozeßanalyse durch Systemidentifikation, sei diese mittels Parameterschätzverfahren oder nichtparametrischen Verfahren durchgeführt, als Eingangs-Ausgangsbeschreibung vor, so bietet es sich an, auch den Entwurf des Regelsystems auf Grundlage dieser Beschreibungsform durchzuführen. Die Übertragungsmatrizenbeschreibung erlaubt keinen unmittelbaren Zugriff auf die Eigenschaften und Strukturen eines Mehrgrößensystems, sondern erfordert die oftmals kaum praktikable Umwandlung der Systembeschreibung auf Smith-Mcmillan-Form, um Aussagen über Ordnung, Pole und Nullstellen zu erhalten. Deshalb empfiehlt es sich, die Systemanalyse sowie den Reglerentwurf unter Ausnutzung der Darstellung des Übertragungssystems durch prime Polynommatrizenquotienten, dem multivariablen Analogon der Übertragungsfunktion, durchzuführen. Mit der genannten Darstellungsform können die Entwurfsverfahren sofort auf die Lösung von algebraischen Gleichungen und auf numerische Faktorisierungsprobleme zurückgeführt werden. Für Analysezwecke kann in der Polynommatrizenbeschreibung recht einfach auf Systeminvarianten, Pole und Nullstellen zugegriffen werden, um Ordnung, Minimalheit, Stabilität sowie Minimalphasigkeit eines Systems zu überprüfen.

Die grundlegende Entwicklung der regelungstechnischen Systembeschreibung durch Polynommatrizen wurde in den sechziger Jahren durchgeführt. Sie erfuhr ihre erste abschliessende Zusammenfassung durch die Arbeiten von Rosenbrock [R2] und Wolovich [W9]. In [R2] wird, vor allem mathematisch und systemtheoretisch motiviert, mit der Rosenbrockschen Systemmatrix eine Beschreibungsform angegeben, welche die anderen Darstellungsformen für lineare Mehrgrößensysteme, wie Zustandsraumbeschreibung, Darstellung durch Übertragungsmatrizen sowie prime Polynommatrizenquotienten, umfasst. Durch Einführung des Begriffs der Systemäquivalenz und einer Menge elementarer Polynommatrizenoperationen wird eine Überführung aller Beschreibungsformen linearer zeitinvarianter Mehrgrößensysteme ineinander gewährleistet. Zusätzlich werden mit invarianten Nullstellen und Kroneckerindizes ein Satz



von Systeminvarianten angegeben der bestimmend für jeden Reglerentwurf ist. In [W9] wird unter anderem neben der Parametrisierung von Mehrgrößensystemen durch kanonische Beschreibungsformen, wie der Steuerungsnormalform für die Zustandsraumdarstellung und der über das Strukturtheorem damit assoziierten strukturisomorphen Polynommatrizenbeschreibung, der Entwurf von Zustandsregelungen mit Beobachter, dynamischer Ausgangsrückführungen mittels Polvorgabe sowie implizite Modellfolge unter Ausnutzung primer Polynommatrizenquotienten vorgeschlagen.

Im Verlauf der siebziger Jahre wurde die grundlegende Theorie weiter ausgebaut. Die Definition minimaler Basen linearer rationaler Vektorräume [F3] und der damit verbundenen Kronecker- und Hermite-Indizes diente als Grundlage für die Einführung kanonischer Darstellungsformen, für deren Berechnung auch numerisch motivierte Algorithmen [A5, K15] angegeben wurden. Von Guidorzi [G5] wurde die Systembeschreibung durch Polynommatrizenquotienten in die Parameteridentifikation von Mehrgrößensystemen eingeführt. Der Einsatz der Polynommatrizenbeschreibung für den Entwurf quadratisch optimalen Filter, bei dem die Spektralfaktorisierung von Polynommatrizen zum Einsatz kam, wurde von Youla [Y2] vorgeschlagen. Entwürfe mittels Polynommatrizenmethoden für die implizite Modellfolge und die Regelung mit endlicher Einstellzeit sind [K4, W8, K3] zu entnehmen. Anfang der achtziger Jahre wurde die Eingangs-Ausgangsbeschreibung durch Polynommatrizen ein integraler Bestandteil für die Auslegung und Implementierung adaptiver Mehrgrößenregelungen, wie die Übersicht in [D8] zeigt. Nimmt man zu den bisher zitierten Veröffentlichungen die Arbeiten von Pernebo [P4], der eine allgemeine Parametrisierung aller möglichen Regler unter dynamischer Ausgangsrückführung angibt, und die Übersichten und Zusammenfassungen in [P3, F1, K7] hinzu, dann kann man aussagen, daß eine umfassende Theorie für die Synthese linearer Reglersysteme in der Frequenzbereichsdarstellung durch Polynommatrizen vorliegt.

Jedoch kann man auch feststellen, daß von kaum einem Einsatz dieser Methodik für einen praktischen Reglerentwurf berichtet wird, was zu einem großen Teil darin begründet ist, daß nur eine geringe Anzahl numerisch zuverlässiger Entwurfsalgorithmen für die Synthese in der Systembeschreibung durch Polynommatrizen verfügbar ist. Im Gegensatz dazu stehen z.B. für den Entwurf eines robusten Folgereglers [D3], also den Zustandsregler mit Beobachter und zusätzlicher Ausgangsrückführung, mit den Verfahren nach [L1, V2] zur Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung und den Programmsammlungen EISPACK [G2] und LINPACK [D9] effiziente numerische Algorithmen zur Verfügung. Im Vorwort zu [K12] sagt Kucera, der Polynommatrixansatz sei

auch regelungstechnisch attraktiv, jedoch außer beim Problem der Spektralfaktorisierung betrachtet er nicht die numerischen Eigenschaften der Algorithmen, welche eine Manipulation von Polynomen und Polynommatrizen erfordern. Solche Algorithmen sind sehr empfindlich gegenüber Rundungsfehlern und können in der Tat numerisch instabil werden. Der Grad des Erfolges des Polynommatrizenansatzes in der Behandlung nicht trivialer Probleme hängt in hohem Maße von den numerischen Eigenschaften der Polynommatrizenarithmetik ab, die benutzt wird, um die Regelstrecke zu analysieren und den Regler zu entwerfen.

Ziel dieser Arbeit ist es, Entwurfsverfahren bereitzustellen die von bekannten kanonischen Beschreibungsformen durch Polynommatrizenquotienten ausgehen und unter Ausnutzung struktureller Systemeigenschaften parameterminimale Regelalgorithmen liefern. Ferner sollen die Synthesemethoden unter vollständigem Verzicht auf Manipulation von Polynommatrizen durch Elementaroperationen [R2, K12], für die jeglicher Beweis numerischer Stabilität ausgeschlossen ist [V3], unter Ausnutzung der Methoden der linearen numerischen Algebra zu zuverlässigen und praktikablen Verfahren ausgebaut werden. Als Nebenbedingung soll die Regelung Unempfindlichkeit gegenüber Parameterunbestimmtheiten und unmodellierter Dynamik der Regelstrecke gewährleisten.

Im einzelnen ist diese Arbeit folgendermaßen aufgebaut. Im zweiten Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Erläuterungen zur Systemdarstellung mittels Polynommatrizen zusammengefaßt. Zusammen mit dem Verzeichnis der Formelzeichen in Anhang A0 soll dies zur besseren Lesbarkeit der Arbeit beitragen. In Kapitel 3 werden, unabhängig von ihrem jeweiligen Einsatz, die numerischen Methoden für Analyse und Synthese dargestellt. Schwerpunkte sind hierbei die Berechnung von kanonischen Primmatrixprodukten aus der Zustandsraumdarstellung, die Bestimmung größter gemeinsamer Teiler, die Lösung von Polynommatrixgleichungen, die Spektralfaktorisierung sowie die Berechnung invarianter Nullstellen von Polynommatrizen. Hierbei kann gezeigt werden, daß durch Verwendung von Töplitzgleichungssystemen, Zustandsraumrealisierungen und der Darstellung der Polynommatrizen als äquivalentes Matrizenbüschel sämtliche Probleme mit numerisch zuverlässigen Methoden gelöst werden können. Im vierten Kapitel wird ein Schätzalgorithmus für die Parameteridentifikation von Mehrgrößensystemen in Polynommatrizendarstellung angegeben. Das Kapitel 5 dient der Darstellung der Regelstrukturen. Für den proportionalen Zustandsregler mit Beobachter, den robusten Folgeregler mit Führungs- und Störmodell und einen dynamisch entkoppelnden Regler werden Synthesegleichungen angegeben, die mit den in Kapitel 3 definierten numerischen Algorithmen gelöst werden können. Das

sechste Kapitel demonstriert die praktische Anwendung der Analyse- und Synthesemethoden für einen Turbogeneratorsatz bei dem die Regelung in Echtzeit durchgeführt wird und den Entwurf eines Reglers für einen Kunststoffextruder, wofür Simulationsergebnisse angegeben werden.

2. Begriffserörterungen

Der Umgang mit Mehrgrößensystemen, die im Frequenzbereich durch Polynommatrizenquotienten beschrieben werden, erfordert die Einführung einiger Begriffe und Definitionen, die in diesem Kapitel zusammengefaßt werden sollen. Dies erweist sich als notwendig, da in der deutschsprachigen regelungstechnischen Literatur keine Veröffentlichung existiert, die diese Systembeschreibung und das systemtheoretische Umfeld umfassend behandelt und dabei eine normative Notation festlegt. Aus Platzgründen wird die Darstellung hier jedoch sehr knapp gehalten. Die Begriffe werden weitestgehend verbal erklärt. Eine ausführliche Schilderung der Theorie der Systembeschreibung mittels Polynommatrizen kann man z.B. in [R2, W9, K12, K7, P3] finden.

In dieser Arbeit wird in der Regel die Notation einer diskreten Systembeschreibung verwendet, da die hier vorgeschlagenen Verfahren vorzugsweise für die digitale Regelung eingesetzt werden. Wenn nicht ausdrücklich auf Unterschiede hingewiesen wird, können jedoch die Ergebnisse analog für kontinuierliche Systeme übernommen werden, da die benutzten Beschreibungsformen für kontinuierliche und diskrete Systeme formal gleich sind.

Die Zustandsraumbeschreibung eines linearen, zeitinvarianten dynamischen Mehrgrößensystems lautet

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) \quad (2.1)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k) + \underline{D} \underline{u}(k) . \quad (2.2)$$

Hierbei bedeuten

$$\underline{x}(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \text{Zustandsvektor}$$

$$\underline{u}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1} : \text{Steuervektor}$$

$$\underline{y}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1} : \text{Ausgangsvektor}$$

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Systemmatrix}$$

$$\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times r} : \text{Steuermatrix}$$

$$\underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{Ausgangsmatrix}$$

$\underline{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$: Durchgangsmatrix .

Die Zustandsraumdarstellung $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$ in Gl. (2.1) wird als *Minimalrealisierung* eines Systemes bezeichnet, wenn alle Zustände steuerbar und beobachtbar sind.

Durch eine z-Transformation und Inversion der dabei entstehenden Fundamentalmatrix erhält als Frequenzbereichsdarstellung des Systems die *Übertragungsmatrix*

$$\underline{G}(z) = \underline{C} (z \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} = \begin{bmatrix} g_{11}(z) & \dots & g_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(z) & \dots & g_{mr}(z) \end{bmatrix} . \quad (2.3)$$

Die Übertragungsmatrix verknüpft die z-transformierten Eingangs- und Ausgangssignalvektoren gemäß

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}(z) \underline{U}(z) . \quad (2.4)$$

Die Übertragungsfunktion vom Eingang j zum Ausgang i lautet

$$g_{ij}(z) = \frac{\underline{C}_i^T \text{adj} (z \underline{I} - \underline{A}) \underline{b}_j}{\det (z \underline{I} - \underline{A})} + d_{ij} = \frac{z_{ij}(z)}{n(z)} . \quad (2.5)$$

Das Nennerpolynom $n(z)$ ist für alle Teilübertragungsfunktionen gleich. Die Wurzeln dieses *charakteristischen Polynoms* werden als *Pole* des Systems $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$ bezeichnet. Die Wurzeln der Zählerpolynome $z_{ij}(z)$ heißen *variante Nullstellen* des Systems.

Genauso wie es möglich ist, jede Einzelübertragungsfunktion $g_{ij}(z)$ in ein Zähler- und ein Nennerpolynom aufzuspalten, kann man auch die gesamte Übertragungsmatrix durch einen Quotienten aus einer Zählerpolynommatrix $\underline{Q}(z)$ und einer Nennerpolynommatrix $\underline{P}(z)$ darstellen. Wegen der Nichtkommutativität eines Matrixproduktes kann man hier

$$\underline{G}(z) = \underline{Q}_r(z) \underline{P}_r^{-1}(z) \quad (2.6a)$$

oder

$$\underline{G}(z) = \underline{P}_l^{-1}(z) \underline{Q}_l(z) \quad (2.6b)$$

ansetzen. Die Polynommatrizen des *rechten Polynommatrizenquotienten* $\underline{Q}_r \underline{P}_r^{-1}$ und des *linken Polynommatrizenquotienten* $\underline{P}_l^{-1} \underline{Q}_l$ sind im allgemeinen unterschiedlich. Beide Darstellungsformen sind jedoch dual zueinander, wie man durch Transponieren der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}^T(z) = \underline{Q}_l^T(z) \underline{P}_l^{-T}(z)$$

leicht nachweisen kann. Der Zusammenhang der Zustandsraumdarstellung mit der Polynommatrixbeschreibung eines Übertragungssystems ist in Anhang A1 dargestellt.

Eine Polynommatrix $\underline{U}(z)$ heißt *unimodular*, wenn gilt

$$\det \underline{U}(z) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det \underline{U}(z) \in \mathbb{R}.$$

Die Inverse $\underline{V}(z) = \underline{U}^{-1}(z)$ einer unimodularen Polynommatrix ist also nicht gebrochen rational, sondern wiederum eine unimodulare Polynommatrix.

Betrachtet man die beiden Polynommatrizengleichungen

$$\underline{P}(z) = \underline{L}(z) \underline{A}(z) \tag{2.7.a}$$

und

$$\underline{Q}(z) = \underline{L}(z) \underline{B}(z), \tag{2.7.b}$$

dann gilt [K7] :

- $\underline{P}(z)$ ist ein *linkes Vielfaches* von $\underline{A}(z)$,
- $\underline{L}(z)$ ist ein *linker Teiler* von $\underline{P}(z)$,
- $\underline{L}(z)$ ist ein *gemeinsamer linker Teiler* von $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$,
- wenn jeder andere gemeinsame linke Teiler von $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ ein linker Teiler von $\underline{L}(z)$ ist, dann heißt $\underline{L}(z)$ der *größte gemeinsame linke Teiler* (ggLT) von $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$,
- $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ sind *linksprim*, falls ihr ggLT eine unimodulare Polynommatrix ist.

Analog können die Begriffe *rechtes Vielfaches*, *rechter Teiler*, (*größter*) *gemeinsamer rechter Teiler* und *rechtsprim* definiert werden.

Die *höchste Koeffizientenmatrix* $\underline{P}_{HK}$ einer Polynommatrix $\underline{P}(z)$ besteht aus den Koeffizienten, die zu den höchsten Potenzen von z in den einzelnen Elementen $P_{ij}(z)$ gehören. Die *höchste Spaltenkoeffizientenmatrix* $\underline{P}_{HSK}$ (*höchste Zeilenkoeffizientenmatrix* $\underline{P}_{HZK}$) besteht dementsprechend aus den Koeffizienten, die zu der höchsten Potenz von z in der jeweiligen Spalte (Zeile) gehören.

Eine Polynommatrix heißt *spaltenreduziert* (*zeilenreduziert*), wenn die höchste Koeffizientenmatrix vollen Spaltenrang (Zeilenrang) besitzt.

Ein Polynommatrizenquotient $\underline{G}(z) = \underline{Q}_r(z) \underline{P}_r^{-1}(z) = \underline{P}_1^{-1}(z) \underline{Q}_1(z)$ ist *proper*, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{G}(z) < \infty \quad (2.8)$$

und *streng proper*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{G}(z) = 0 \quad (2.9)$$

existiert.

Unter dem *Spaltengrad* $\text{grad}_{si} \underline{P}(z)$ der Spalte i einer Polynommatrix versteht man die maximale Polynomordnung aller Elemente der jeweiligen Spalte. Ein rechter Polynommatrizenquotient ist genau dann *proper*, wenn $\underline{P}(z)$ spaltenreduziert ist und die Spaltengrade von $\underline{Q}(z)$ kleiner oder gleich den jeweiligen Spaltengraden von $\underline{P}(z)$ sind. Ähnliches gilt für die Zeilengrade $\text{grad}_{zi} \underline{P}(z)$ und die *propere linke Polynommatrizenquotienten*.

Ein rechter (linker) Polynommatrizenquotient heißt *minimal*, falls $\underline{P}(z)$ spaltenreduziert (zeilenreduziert) ist und falls die Zähler- und die Nennerpolynommatrix rechtsprim (linksprim) sind. Ein minimaler Polynommatrizenquotient, der auch als Primmatrixprodukt bezeichnet wird, entspricht einer minimalen Zustandsraumdarstellung. In diesem Fall ist die Ordnung der mit dem Primmatrixprodukt assoziierten minimalen Zustandsraumdarstellung gleich der Summe der Spaltengrade (Zeilengrade) von $\underline{P}(z)$.

Abschließend sei noch die sogenannte *Smith-Form* $[G_1, R_2]$ einer Polynommatrix erwähnt. Man kann jede Polynommatrix in ein Produkt aus zwei unimodularen Polynommatrizen $\underline{U}(z)$ und $\underline{V}(z)$ und einer Diagonalmatrix $\underline{P}_S(z)$ zerlegen, so daß gilt.

$$\underline{P}(z) = \underline{U}(z) \underline{P}_S(z) \underline{V}(z) \quad (2.10)$$

Die Smith-Form besitzt die Diagonalstruktur

$$\underline{P}_S(z) = \begin{bmatrix} p_1(z) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & p_r(z) & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Diagonalelemente sind eindeutige Polynome, da sie der Teilbarkeitsbedingung

$p_{i+1}(z)$ ist teilbar durch $p_i(z)$

gehören müssen. Die Polynome $p_i(z)$ heißen *invariante Polynome* von $\underline{P}(z)$. In einem Polynommatrizenquotienten bilden die Wurzeln der invarianten Polynome der Nennerpolynommatrix die *Pole* des Systems und die Wurzeln der invarianten Polynome des Zählers die sogenannten *invarianten Nullstellen*. Die systemtheoretische Bedeutung der invarianten Nullstellen entspricht der Bedeutung der Wurzeln des Zählerpolynoms einer Übertragungsfunktion im Eingrößenfall, so daß die Definition von Minimalphasigkeit und stabilen inversen Systemen sich nicht an den invarianten Nullstellen orientieren darf.

Unter *elementaren Äquivalenztransformationen* versteht man folgende Operationen mit Polynommatrizen [R2]:

$L[i*a]$	Multiplikation der i-ten Zeile mit der Konstanten a
$L[i,j]$	Vertauschung der Zeilen i und j
$L[i+j*a(z)]$	Addition der mit einem Polynom $a(z)$ multiplizierten Zeile j zur Zeile i
$R[i*a]$	Multiplikation der i-ten Spalte mit der Konstanten a
$R[i,j]$	Vertauschung der Spalten i und j
$R[i+j*a(z)]$	Addition der mit einem Polynom $a(z)$ multiplizierten Spalte j zur Spalte i

Beispielsweise gilt mit dieser Notation für eine elementare Zeilenoperation

$$\begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2*q(z)]} \begin{bmatrix} p_{11}(z)+q(z)p_{21}(z) & p_{12}(z)+q(z)p_{22}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) \end{bmatrix}$$

und die zugehörige unimodulare Transformationsmatrix lautet

$$\underline{L}(z) = \begin{bmatrix} 1 & q(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zeilenoperationen entsprechen einer Multiplikation mit einer unimodularen Matrix von links, Spaltenoperationen entsprechen einer Multiplikation mit einer unimodularen Matrix von rechts. Elementaroperationen ändern daher nicht die invarianten Nullstellen einer Polynommatrix. Folgen von elementaren Äquivalenzoperationen können zur Konstruktion unimodularer Transformationsmatrizen eingesetzt werden.

Hiermit soll die allgemeine Abhandlung von Begriffen abgeschlossen werden. Spezielle Definitionen, werden in den Abschnitten eingeführt, in denen neue Begriffe zum ersten Mal benutzt werden.

3. Numerische Methoden zur Analyse und Synthese

Bevor eine Methodik für den Reglerentwurf mittels Polynommatrixmethoden angegeben werden kann, müssen in diesem Kapitel grundlegende numerische Algorithmen für die Handhabung von Polynommatrizen und Polynommatrixquotienten bereitgestellt werden.

Sicherlich ist es möglich einen großen Teil der Probleme in Analyse und Synthese von Systemen in der Beschreibung durch Polynommatrizen mittels Transformation der Systemmatrizen auf Diagonal- und Dreiecksform zu lösen. Im Anhang zu [K12] wird eine Vielzahl von Algorithmen angegeben, in denen die numerischen Ergebnisse, angefangen von der Determinante einer Polynommatrix über den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynommatrizen bis hin zur Lösung von Polynommatrixgleichungen, entweder mittels äquivalenter [R2] oder unimodularer elementarer Transformation, wie sie in Kapitel 2 definiert wurden, erhalten werden. Die Anwendung von Elementaroperationen hat den Vorteil, daß Algorithmen zur Behandlung von Polynommatrizen auf bekannte Verfahren der linearen Algebra für Matrizen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden können. Jedoch stehen diesem Vorgehen einige schwerwiegende numerische Nachteile entgegen.

Die wesentlichen Kritikpunkte schlagwortartig zusammengefaßt lauten: Numerische Verfahren die elementare Polynomoperationen verwenden, sind nicht stabilisierbar, verlaufen unkontrolliert und sind damit auch für die Überprüfung des Rangs einer Polynommatrix nicht verwendbar. Diese Aussage soll im folgenden kurz erläutert werden.

a) Nichtstabilisierbarkeit

In der linearen Algebra wird bei Eliminationsverfahren, wie z.B. im Gauß-Algorithmus zur Triangularisierung von Matrizen, die numerische Stabilisierung der Transformation durch Austauschschritte erreicht. Diese "Pivotisierung" gewährleistet, daß die Zeilen- und Spaltenmultiplikatoren des Eliminationsschrittes im Betrage kleiner als "1" sind und führt zu einer Dämpfung der numerischen Rundungsfehler. Eine dem Pivotschritt entsprechende Anweisung lautet: "Bringe mittels Tauschoperation das Element größten Betrages der aktuellen Spalte (Zeile) in die Pivotposition". Hierbei bezeichnet man als Pivotposition z.B. die Zeile mit deren Vielfachen die Elimination vorzunehmen ist.

Bei der entsprechenden Elementaroperation für Polynommatrizen verhindert der im allgemeinen unterschiedliche Grad der Polynomelemente ein entsprechendes Vorgehen. Hier muß die Anweisung lauten: "Bringe mittels Tauschoperation das Element mit niedrigstem Grad in der aktuellen Spalte (Zeile) in die Pivotposition". Dies kann dazu führen, daß der Koeffizient des zur Vervielfachung benutzten Monoms vom Betrage sehr groß ist. Die Auswirkung einer typischen Zeilenoperation kann an einem trivialen Beispiel verdeutlicht werden.

Gegeben sei

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} \delta & z \\ z & z \end{bmatrix}$$

und δ sei klein, jedoch verschieden von Null. Der Eliminationsschritt zur Transformation auf obere Dreiecksform ergibt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/\delta & 1 \end{bmatrix} \underline{P}(z) = \begin{bmatrix} \delta & z \\ 0 & z - z^2/\delta \end{bmatrix}.$$

Je kleiner δ ist um so größer werden die Koeffizienten in der transformierten Polynommatrix und ebenso wachsen die numerischen Rundungsfehler an.

In allen Algorithmen zur Triangularisierung oder Diagonalisierung wird die Wahl der Pivotelemente durch die Potenzen von z und nicht durch den Betrag der Koeffizienten bestimmt. Dies schließt jeden Beweis der numerischen Stabilität für diese Methoden aus.

b) Unkontrolliertheit

Elementaroperationen können das unkontrollierte Ansteigen des Grades bestimmter Polynomelemente bewirken. Auch diese Aussage kann durch ein Beispiel belegt werden. Bei der Elimination des führenden Koeffizienten der Elementes 2,1 gemäß

$$\left[\begin{array}{c|c} z + \dots & z^6 + \dots \\ \hline z^6 + z^5 + \dots & z + \dots \end{array} \right] \xrightarrow{L[2+1*(-z^5)]} \left[\begin{array}{c|c} z + \dots & z^6 + \dots \\ \hline z^5 & -z^{11} \end{array} \right]$$

wird der Grad des Elementes 2,2 erheblich erhöht. Neben großen Rundungsfehlern, die dadurch verursacht werden, daß die auf diese Weise erhöhte Ordnung im Verlauf der weiteren Transformation oftmals wieder herabgesetzt werden muß, führt die Unkontrolliertheit auch zu Problemen bei der Festlegung des Speicherplatzbedarfes. Der Determinantengrad der Polynommatrix konzentriert sich so oftmals auf ein Polynomelement.

Wilkinson hat in [W3] gezeigt, welche numerischen Probleme mit Polynomen hoher Ordnung verknüpft sind. Nach dem Wurzelsatz von Vieta ist der konstante Koeffizient eines normierten Polynoms das Produkt der Wurzeln, der zweithöchste Koeffizient ist die Summe der Wurzeln. Damit unterscheiden sich Polynome hoher Ordnung in den Beträgen ihrer Koeffizienten oft um mehrere Zehnerpotenzen. Daher führen Additionsoperationen manchmal zur Auslöschung aller signifikanten Stellen eines Summanden.

Die Schlußfolgerung aus dieser Diskussion ist, daß elementare Polynommatrixoperationen bei der numerischen Auswertung von Polynommatrixgleichungen nach Möglichkeit unterbleiben sollen. Alle in diesem Kapitel formulierten Algorithmen wurden nach diesem Grundsatz entwickelt.

Zunächst wird die Berechnung von Primmatrixprodukten aus der Zustandsraumdarstellung behandelt. Die hier dargestellte Vorgehensweise ist eng mit dem Problem der Minimalrealisierung und der Transformation von Zustandsraumssystemen auf Normalformen verbunden. Die für die Bestimmung von Struktur und Parametern des kanonischen Primmatrixprodukts eingesetzten numerischen Algorithmen sind elementare und orthogonale Ähnlichkeitstransformationen. Obwohl an zahlreichen anderen Stellen dieser Arbeit die Popov-Form des Primmatrixprodukts Verwendung findet, wird das numerische Verfahren nicht für dieses Sonderform hergeleitet, da dies schon in [H1] geleistet wurde. Stattdessen wird die Hermite-Form eines Polynommatrixquotienten hergestellt.

In Analogie zur Überprüfung von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sowie der Separation nicht steuerbarer oder beobachtbarer Systemanteile eines Regelsystems in Zustandsraumdarstellung, wird im nächsten Abschnitt ein Verfahren zur Überprüfung der Primheit zweier Polynommatrizen und zur Berechnung

ihres größten gemeinsamen Teilers angegeben. Die numerische Auswertung der Teilerberechnung geschieht durch einen Gauß-Algorithmus zur Berechnung der Stufenform des mit den Polynommatrizen assoziierten Töplitz-Gleichungssystems.

Abschnitt 3.3 stellt zwei Lösungsverfahren für einseitige Polynommatrixgleichungen vor. Diese Gleichungsform findet Verwendung bei Syntheseverfahren für die Vorgabe der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises und läßt sich bei der sogenannten dualen primen Faktorisierung zur Berechnung kanonischer Primmatrixprodukte nutzen. Die numerische Lösung läßt sich über eine Zustandsraumrealisierung mit anschließender Transformation auf Steuerbarkeitsnormalform oder mittels QR-Zerlegung eines aus dem Koeffizientenvergleich der Polynommatrizen abgeleiteten Block-Töplitz-Gleichungssystems finden.

In Abschnitt 3.4 wird die Lösung der beidseitigen Polynommatrixgleichung, welche für den Entwurf von Modellfolgereglern bedeutsam ist, mittels des Kroneckerproduktes auf die Lösung der einseitigen Polynommatrixgleichung zurückgeführt. Weiterhin kann durch die zeilenweise Berechnung von größten gemeinsamen Teilern nach Abschnitt 3.2 die Problemdimension erheblich verringert werden kann.

Im fünften Abschnitt wird die rekursive Cholesky-Faktorisierung und ein Newton-Raphson-Verfahren zur spektralen Faktorisierung parahermitischer Polynommatrizen genutzt. Diese Zerlegung kann für die Synthese quadratisch optimaler Regelkreise eingesetzt werden.

Im letzten Abschnitt wird eine numerische Vorgehensweise für die Berechnung der invarianten Nullstellen einer Polynommatrix angegeben, so daß damit eine Möglichkeit zur Verfügung steht, Pole und Nullstellen eines Systems für die Beurteilung von Stabilität und Minimalphasigkeit zu ermitteln. Hierbei wird die numerische Auswertung über die Berechnung der verallgemeinerten Eigenwerte eines zur Polynommatrix äquivalenten Matrixbüschels durchgeführt.

3.1 Berechnung eines Primmatrixprodukts aus der Zustandsraumdarstellung

Neben der sogenannten Popov-Form [P5] und ihren Varianten - wie sie z.B. in [B2, H1, K7, P3] beschrieben und benutzt werden - existiert eine weitere kanonische Form des Primmatrixprodukts, die in [R2] zuerst definiert wurde. Die dort aufgezählten Struktureigenschaften sollen zunächst auch hier angegeben werden, um dann ein Verfahren zu formulieren, das eine Zustandsraumdarstellung erzeugt, die der kanonischen Struktur dieses Primmatrixprodukts äquivalent ist. Das Primmatrixprodukt kann dann sehr einfach aus den Parametern der Normalform der Zustandsraummatrizen berechnet werden.

3.1.1 Definition eines Polynommatrixquotienten in Hermite-Form

Wendet man die in [R2] für den Fall einer allgemeinen Systemmatrix angegebenen Sätze auf ein steuerbares System $\{A, B, C, D\}$ in Zustandsraumdarstellung an, so kann man einen Polynommatrixquotienten $\underline{Q}(z) \underline{P}^{-1}(z)$ in der sogenannten Hermite-Form [K7] definieren, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

- a) $\underline{P}(z)$ liegt in oberer Dreiecksform vor,
- b) die Hauptdiagonale von $\underline{P}(z)$ ist mit normierten Polynomen besetzt, die einen höheren Grad als alle in der gleichen Zeile befindlichen Polynomelemente haben,
- c) alle Nichtdiagonalelemente einer Zeile sind identisch "Null", wenn das Diagonalelement identisch "Eins" ist.

Da man auch hier wieder die Dualität zwischen linken und rechten Polynommatrixquotienten ausnutzen kann, ist es möglich durch einfaches Vertauschen der Begriffe "Zeile" und "Spalte" die entsprechende Form für einen linken Polynommatrixquotienten zu definieren. Es genügt daher, im folgenden rechte Polynommatrixquotienten zu betrachten.

Aus der Struktur der Nennerpolynommatrix der Hermite-Form können strukturelle Eigenschaften der dem System zugeordneten System- und Steuermatrix einer kanonischen strukturisomorphen Zustandsraumrealisierung entnommen werden. Wie in Anhang A1 gezeigt, kann man den Polynomelementen p_{ij} Blockelemente der Matrix A_S zuordnen, wenn man für die Systemmatrix der Zustandsraumdarstellung die Partitionierung

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.1.1.1)$$

durchführt. Um die Bedingung a) zu erfüllen muß gelten

$$A_{ij} = 0, \quad \text{für } i > j,$$

damit durch die einseitige Verkopplung der Frobenius-Blöcke der Systemmatrix $[A]$ die obere Dreiecksform der Nennerpolynommatrix des rechten Polynommatrixquotienten

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} P_{11}(z) & P_{12}(z) & P_{1r}(z) \\ 0 & P_{22}(z) & P_{2r}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_{rr}(z) \end{bmatrix} \quad (3.1.1.2)$$

gesichert wird. Aus der Bedingung b) folgt weiterhin die Zeilenreduziertheit der Polynommatrix $\underline{P}(z)$ und für die führende Zeilenkoeffizientenmatrix gilt

$$\underline{P}_{HZK} = \underline{I}_r. \quad (3.1.1.3)$$

Um eine Zustandsraumrealisierung des rechten Polynommatrixquotienten $\underline{Q}(z) \underline{P}^{-1}(z)$ zu erhalten, kann man damit beginnen, die triviale linke Polynommatrixbeschreibung

$$\tilde{Y}(z) = \underline{P}^{-1}(z) \underline{I}_r \underline{u}(z) \quad (3.1.1.4)$$

im Zustandsraum darzustellen. Die Gesamtrealisierung kann mit dem Bilden der Zustandsraumdarstellung von

$$\underline{Y}(z) = \underline{Q}(z) \tilde{Y}(z) \quad (3.1.1.5)$$

abgeschlossen werden.

Die Realisierung von Gl. (3.1.1.4) ergibt ein System in Beobachternormalform [K7, A1], die charakteristischen Zeilen verlaufen dabei senkrecht. Die Realisierung des gesamten Systems ergibt eine Steuerbarkeitsform mit einseitiger Kopplung [K7]. Zur Berechnung eines Polynommatrixquotienten in Hermite-Form gilt es nun, diese Form der Zustandsraumdarstellung mittels Ähnlichkeitstransformation aus einem beliebigen System $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ herzustellen. Weiterhin ist die Frage nach der Berechnung der Zählerpolynommatrix $\underline{Q}(z)$ zu beantworten.

3.1.2 Transformation einer Zustandsraumbeschreibung auf obere Block-Hessenberg-Form

Wie die zur Popov-Form [P5, F3] äquivalente Zustandsraumdarstellung, so kann auch die zur Hermite-Form gehörige Beschreibung in zwei Schritten, äquivalent zur Vorgehensweise in [A5, H1], erzielt werden. Nämlich einer ersten Stufe, die mittels numerisch stabilisierter Ähnlichkeitstransformationen durchgeführt wird und die Struktur, d.h. die Zeilengrade, der Nennerpolynommatrix $\underline{P}(z)$ liefert. In einem zweiten Transformationsschritt wird eine verallgemeinerte Frobenius-Form hergestellt, der die Parameter, d.h. die Koeffizienten der Polynommatrizen, entnommen werden können.

Der in diesem Abschnitt beschriebene Transformationsschritt auf obere Block-Hessenberg-Form entspricht der in [W3] angegebenen Transformation auf Hessenberg-Form. Jedoch ist diese Methode dahingehend zu modifizieren, daß im Verlauf der elementaren Transformationen der Popov-Belevitch-Hautus-Rangtest [K7] durchgeführt wird. Dies erfordert eine geänderte Abfolge der Transformation, da natürlich auch Spalten der Steuermatrix $\underline{B}$ berücksichtigt werden müssen. Eine Beschreibung des Ablaufs der Transformation ist z.B. in [A5] angegeben und soll hier nicht wiederholt werden.

Ein Beispiel für die Struktur der Block-Hessenberg-Form mit den Hermite-Indizes [K7] $n_{z1}=4$, $n_{z2}=4$, $n_{z3}=2$, $n_{z4}=0$ ist in Bild 3.1.2.1 für ein System der Ordnung $n=12$ mit $n_s=10$ steuerbaren Zuständen angegeben.

Der nicht steuerbare Systemanteil in den Spalten $n_s+1, \dots, n$ der Zustandsmatrix und die zugehörigen Zeilen in $\underline{A}_{BHF}$ und $\underline{B}_{BHF}$ werden für die Beschreibung des Eingangs- und Ausgangsverhaltens nicht mehr benötigt und kann aus der Systembeschreibung entfernt werden. Auch ein Sonderfall der Transformation ist in Bild 3.1.2.1 zu erkennen: der vierte Steuervektor enthält kein

Pivotelement ($\otimes$) und wird für die vollständige Steuerbarkeit des steuerbaren Untersystems der Ordnung 10 nicht benötigt.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} n_{z1} \quad n_{z2} \quad n_{z3} \quad n_{z4} \\
 \left[\begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{c} \times \times \times \times \\ \otimes \times \times \times \\ \otimes \times \times \times \\ \otimes \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ \times \times \times \times \\ \otimes \times \times \times \\ \otimes \times \times \\ \otimes \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{c} 0 \\ \times \times \\ \otimes \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \end{array} \\
 \hline
 & & \begin{array}{c} 0 \\ \otimes \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \end{array} \\
 \hline
 & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{n_s}
 \end{array}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \otimes \times \times \times \\ \times \times \times \\ \times \times \times \\ \times \times \times \\ \otimes \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \otimes \times \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} \otimes \times \times \times \\ \times \times \times \\ \times \times \times \\ \times \times \times \\ \otimes \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \otimes \times \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} n_s
 \end{array}
 \end{array}$$

Bild 3.1.2.1 Struktur der Block-Hessenberg-Form $[A_{BHF}, B_{BHF}]$

Der durch die Transformation auf Block-Hessenberg-Form ausgeführte Rangtest entspricht der Suche nach linear unabhängigen Spalten der Kalman'schen Steuerbarkeitsmatrix in der Abfolge

$$\underline{b}_1, A \underline{b}_1, \dots, A^{n_{z1}-1} \underline{b}_1, \dots, \dots, \underline{b}_m, A \underline{b}_m, \dots, A^{n_{zr}-1} \underline{b}_r$$

und die Hermite-Indizes n_{zi} kennzeichnen die Potenz der Zustandsmatrix für die das Produkt $A^{n_{zi}} \underline{b}_i$ zu den vorangehenden Vektoren linear abhängig ist. Zu Bild 3.1.2.1 kann das Steuerbarkeitsdiagramm [K7] in spaltenweisem Aufbau gemäß Bild 3.1.2.2 aufgestellt werden.

$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_4$	
$\times$	$\times$	$\times$	0	$\underline{I}$
$\times$	$\times$	$\times$		$\underline{A}$
$\times$	$\times$	$\times$		$\underline{A}^2$
$\times$	$\times$	0		$\underline{A}^3$
0	0			$\underline{A}^4$

Bild 3.1.2.2 Steuerbarkeitsdiagramm zu Bild 3.1.2.1

Dieser Abschnitt soll mit einem numerischen Beispiel für eine Transformation auf die hier definierte Block-Hessenberg-Form abgeschlossen werden. Dieses Beispiel soll in den weiteren Abschnitten bis hin zu einem rechten Polynommatrixquotienten in Hermite-Form fortgeführt werden.

Beispiel 3.1.2

Gegeben sei die (2x3)-Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{8z - 7}{z^2 - z} & \frac{11z - 10}{z^2 - z} & \frac{3}{z} \\ \frac{4z - 1}{z^2 - z} & \frac{5z - 2}{z^2 - z} & \frac{1}{z} \end{bmatrix},$$

die, nach einer weder vollständig steuerbaren noch beobachtbaren Realisierung, zunächst auf die zu Bild 3.1.2.1 duale untere Block-Hessenberg-Form transformiert wurde, so daß der nicht beobachtbare Systemanteil eliminiert werden konnte. Die anschließende Transformation auf obere Block-Hessenbergform ergibt die minimale Systembeschreibung

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{BHF} & \underline{B}_{BHF} \\ \underline{C}_{BHF} & \underline{0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.75 & 0.15 & -0.3 & 2.0 & 2.5 & 0.5 \\ 1.25 & 0.25 & -0.5 & 0.0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ \hline 4.0 & -2.0 & 0.0 & & & \\ 2.0 & 0.0 & 0.0 & & \underline{0} & \end{array} \right].$$

Zur besseren Darstellung wurde hier die Anordnung in der Form der Rosenbrock-Matrix [R2] gewählt. Schon in dieser Stufe der Transformation, die mit numerisch stabilisierten Ähnlichkeitsoperationen, wie Givens-Rotationen, Housholder-Transformationen oder Elementartransformationen mit Pivotisierung [A5, A6], erhalten werden kann, ist es möglich die Hermite-Indizes abzulesen. Hier sind es $n_{z1}=2$, $n_{z2}=1$ und $n_{z3}=0$.

Nachdem die Struktur, d.h. die Hermite-Indizes und damit auch die Zeilengrade der Nennerpolynommatrix, aus der Block-Hessenberg-Form bestimmt

wurden, sind die Parameter der kanonischen Zustandsraumdarstellung zu berechnen, wie es im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

3.1.3 Transformation von Block-Hessenberg-Form auf Block-Frobenius-Form

Von der Block-Hessenberg-Form ausgehend kann nun der zweite Schritt, die Transformation auf die Steuerbarkeitsform mit einseitiger Kopplung, die allgemein auch als Block-Frobenius-Form bezeichnet werden kann, vollzogen werden. In allen Spalten der Hypermatrix $[A_{BHF} \ B_{BHF}]$, welche ein Pivotelement enthalten, können nun oberhalb dieses Elements mittels elementarer Ähnlichkeitstransformation Nullelemente erzeugt werden. Da das eliminierende Pivotelement ein Subdiagonalelement ist, werden Nullelemente, die während der Zeilenoperationen erzeugt werden, in der zur Ähnlichkeitstransformation ergänzenden Spaltenoperation dann nicht wieder aufgefüllt, wenn in der ersten Spalte der Zustandssystemmatrix mit der Elimination begonnen wird.

Für den steuerbaren Teil des Systems nach Bild 3.1.2.1 ist in Bild 3.1.3.1 die Struktur der Block-Frobenius-Form angegeben.

$$A_{BFF} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & \gamma_{110} & \gamma_{120} & \gamma_{130} & \\ & \gamma_{111} & \gamma_{121} & \gamma_{131} & \\ & & & & \\ & 1 & \gamma_{112} & \gamma_{122} & \gamma_{132} & \\ & & & & \\ & & 1 & \gamma_{113} & \gamma_{123} & \gamma_{133} & \\ & & & & & & \\ & & 0 & & \gamma_{220} & \gamma_{230} & \\ & & & 1 & \gamma_{221} & \gamma_{231} & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & \gamma_{222} & \gamma_{232} & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & \gamma_{223} & \gamma_{233} & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 0 & & \gamma_{330} & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & \gamma_{331} \end{bmatrix}, B_{BFF} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{140} & \\ & \gamma_{141} & \\ & & \gamma_{142} & \\ & & & \gamma_{143} & \\ & & & & 1 & \gamma_{240} & \\ & & & & & \gamma_{241} & \\ & & & & & & \gamma_{242} & \\ & & & & & & & \gamma_{243} & \\ & & & & & & & & 1 & \gamma_{340} & \\ & & & & & & & & & \gamma_{341} \end{bmatrix}$$

Bild 3.1.3.1 Struktur der Block-Frobenius-Form (Steuerbarkeitsform mit einseitiger Kopplung) zu Bild 3.1.2.1

Wie bei der Steuerungsnormalform mit zweiseitiger Kopplung [A1] kann man auch hier die signifikanten Elemente in den charakteristischen Spalten indizieren. In Analogie zu den Popovschen α - und β -Parameter [P5] können auch für die hier eingeführten γ -Parameter lineare Abhängigkeitsbeziehungen gewonnen werden, die die Eindeutigkeit dieser Parameter gewährleisten. Nach [K7] gilt

$$\underline{A}^{n_{zi}} \underline{b}_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{n_{zj}-1} \gamma_{ijk} \underline{A}^k \underline{b}_j \quad \text{für } n_{zi} > 0 \quad (3.1.3.1)$$

$$\underline{b}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{n_{zj}-1} \gamma_{ijk} \underline{A}^k \underline{b}_j \quad \text{für } n_{zi} = 0 \quad (3.1.3.2)$$

In den Regelungsnormalformen mit beidseitiger Kopplung [K7] und ebenso in der permutierten, gestaffelten Steuerungsnormalform [H1] ist die obere Summationsgrenze stets gleich der Anzahl von Eingängen. Da in Gl. (3.1.3.1,2) die obere Summationsgrenze der äußeren Summe vom Spaltenindex i der betrachteten Spalte der Steuermatrix $\underline{B}$ gebildet wird, sind die γ -Parameter von der Anordnung der Spalten $\underline{b}_i$ in der Steuermatrix des Systems abhängig. Entsprechend sind auch die Hermite-Indizes n_{zi} nicht invariant gegenüber Vertauschungen der Spalten von $\underline{B}$. Ist die Reihenfolge der Spalten fest, dann besitzt jedes System $(\tilde{\underline{A}}, \tilde{\underline{B}}, \tilde{\underline{C}})$, das ähnlich zu $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ ist, die gleichen γ -Parameter. Damit ist es auch möglich, aus der minimalen kanonischen Zustandsraumbeschreibung in oberer Block-Frobenius-Form ein eindeutiges Primmatrixprodukt zu erhalten, wie es im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

Beispiel 3.1.3

Die Transformation der Block-Hessenberg-Form aus Beispiel 3.1.2 zur Block-Frobenius-Form ergibt die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{BFF} & \underline{B}_{BFF} \\ \underline{C}_{BFF} & \underline{0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ \hline 8.0 & 1.0 & 11.0 & & & \\ 4.0 & 3.0 & 5.0 & & \underline{0} & \end{array} \right] .$$

3.1.4 Berechnung eines Primmatrixprodukts in Hermite-Form aus der Block-Frobenius-Form

Im vorangehenden Abschnitt wurde der Zusammenhang zwischen den γ -Parametern und den Koeffizienten p_{ijk} der Nennerpolynommatrix eines rechten Polynommatrixquotienten angedeutet. Dieser Zusammenhang soll in diesem Abschnitt aufgezeigt werden. Weiterhin soll ein numerisches Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten der Zählerpolynommatrix $\underline{Q}(z)$ hergeleitet werden.

Um zu zeigen, daß

$$p_{ijk} = \begin{cases} -\gamma_{ijk} & \text{für } k \neq n_{zi} \\ 1 & \text{für } k = n_{zi} \end{cases} \quad (3.1.4.1)$$

gilt, werden nun die Beziehungen der linearen Abhängigkeit nach Gl. (3.1.3.1,2) auf die Koeffizienten der Polynommatrix $\underline{P}(z)$ übertragen. Unter der Voraussetzung, daß das Paar $\{\underline{A}, \underline{B}\}$ steuerbar ist, existiert die prime Zerlegung

$$(\underline{zI} - \underline{A})^{-1} \underline{B} = \underline{\tilde{Q}}(z) \underline{P}^{-1}(z), \quad (3.1.4.2)$$

woraus folgt

$$(\underline{zI} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{P}(z) = \underline{\tilde{Q}}(z). \quad (3.1.4.3)$$

Nun wird $\underline{P}(z)$ in der Darstellung als Matrixpolynom angesetzt und die Matrix rationaler Funktionen $(\underline{zI} - \underline{A})^{-1}$ in eine Reihe entwickelt. Unter der Annahme, daß k die höchste Potenz aller Polynome in $\underline{P}(z)$ ist, erhält man aus Gl. (3.1.4.3)

$$z^{-1} (\underline{I} + \underline{A} z^{-1} + \underline{A}^2 z^{-2} + \dots) \underline{B} (\underline{P}_0 + \underline{P}_1 z + \dots \underline{P}_k z^k) \in \mathbb{R}^{n \times r}[z]. \quad (3.1.4.4)$$

Das Produkt in Gl. (3.1.4.4) muß also eine Polynommatrix sein und keine Matrix rationaler Funktionen. Da das Produkt den Faktor z^{-1} enthält, ist diese Aussage in Gl. (3.1.4.4) sicherlich nur richtig, wenn gilt

$$\underline{B} \underline{P}_0 + \underline{A} \underline{B} \underline{P}_1 + \dots + \underline{A}^k \underline{B} \underline{P}_k = \underline{0}, \quad (3.1.4.5)$$

so daß kein gebrochen rationaler Term auftritt.

Gl. (3.1.4.5) kann auch als Matrixprodukt

$$[\underline{B} \quad \underline{A} \underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^k \underline{B}] \begin{bmatrix} \underline{P}_0 \\ \underline{P}_1 \\ \vdots \\ \underline{P}_k \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (3.1.4.6)$$

geschrieben werden. Ordnet man nun das Matrixprodukt in Summenform für die Spalten j der Ergebnismatrix an und beachtet die Struktur der Koeffizienten $\underline{P}_i$ des Matrixpolynoms, wie sie für die Hermite-Form in Abschnitt 3.1.1 definiert wurde, dann erhält man

$$\underline{A}^{n_z j} \underline{B}_j = - \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^{n_z i - 1} \underline{P}_{ijk} \underline{A}^k \underline{B}_i, \quad \text{für } n_z j > 0 \quad (3.1.4.7)$$

$$\underline{B}_j = - \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=0}^{n_z i - 1} \underline{P}_{ijk} \underline{A}^k \underline{B}_i, \quad \text{für } n_z j = 0. \quad (3.1.4.8)$$

Damit folgt, daß die Koeffizienten der Nennerpolynommatrix des rechten Primmatrixprodukts in Hermite-Form aus den negativen Koeffizienten der Frobenius-Ketten der Zustandsraumdarstellung in Steuerbarkeitsnormalform mit einseitiger Kopplung erhalten werden können.

Nun muß noch die Zählerpolynommatrix $\underline{Q}(z)$ bestimmt werden. Dies kann nicht wie bei der Steuerungsnormalform nach [K7] durch reine Inspektion oder wie bei der permutierten Steuerungsnormalform [H1] durch Umsortieren geschehen, denn, wie im Eingrößenfall [A1], enthält die Steuerbarkeitsform in der Beobachtungsmatrix $\underline{C}_{\text{BFF}}$ nicht Polynomkoeffizienten, sondern Markov-Parameter. Mit der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z)$ des Systems erhält man für die Zählermatrix des rechten Polynommatrixquotienten

$$\underline{Q}(z) = \underline{G}(z) \underline{P}(z). \quad (3.1.4.9)$$

Stellt man nun die Übertragungsmatrix mittels

$$\underline{G}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{H}_i z^{-i} \quad (3.1.4.10)$$

durch die $(m \times r)$ -Block-Markov-Parameter $\underline{H}_i$ dar und setzt weiterhin ein streng properes Übertragungssystem, mit $\underline{H}_0 = \underline{D} = \underline{0}$, voraus, dann ergibt sich aus Gl. (3.1.4.9,10)

$$\begin{aligned}
 & (\underline{H}_1 z^{-1} + \underline{H}_2 z^{-2} + \dots) (\underline{P}_0 + \underline{P}_1 z + \dots + \underline{P}_k z^k) = \\
 & (\underline{Q}_0 + \underline{Q}_1 z + \dots + \underline{Q}_{k-1} z^{k-1}) .
 \end{aligned} \tag{3.1.4.11}$$

Der Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten von Gl. (3.1.4.11) liefert das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_k \\ \underline{H}_k & \underline{H}_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{H}_k & \underline{H}_{k-1} & \underline{H}_{k-2} & \dots & \underline{H}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_k \\ \underline{P}_{k-1} \\ \vdots \\ \underline{P}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{k-1} \\ \underline{Q}_{k-2} \\ \vdots \\ \underline{Q}_0 \end{bmatrix} . \tag{3.1.4.12}$$

Die ersten k Markov-Parameter sind andererseits gegeben durch

$$[\underline{H}_1 \quad \underline{H}_2 \quad \dots \quad \underline{H}_k] = \underline{C} [\underline{B} \quad \underline{A} \underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^{k-1} \underline{B}] . \tag{3.1.4.13}$$

Nun gilt für die Kalman'sche Steuerbarkeitsmatrix einer Steuerbarkeitsnormalform [K7], daß sie in ihren Spalten die Einheitsmatrix enthält. Wie man leicht durch Ausmultiplizieren eines nach Bild 3.1.3.1 strukturierten Systems verifizieren kann, gilt, wenn k von Null verschiedene Hermite-Indizes existieren,

$$[\underline{b}_1 \quad \underline{A} \underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{A}^{n_{z1}-1} \underline{b}_1 \mid \dots \mid \underline{b}_k \quad \underline{A} \underline{b}_k \quad \dots \quad \underline{A}^{n_{zk}-1} \underline{b}_k] = \underline{I}_n . \tag{3.1.4.14}$$

Nun ist es numerisch nicht sinnvoll, das Block-Toplitz-Gleichungssystem, Gl. (3.1.4.12), für die Berechnung der Koeffizienten der Zählerpolynommatrix aufzustellen, denn das widerspricht dem Grundsatz der Berechnung der Polynomkoeffizienten "in place", wie es für das Primmatrixprodukt in Popov-Form [H1] ohne weiteres möglich ist. Weiterhin läßt Gl. (3.1.4.13) einen direkten und einfacheren Weg vermuten.

Zur Herleitung einer numerischen Methode zur Berechnung der Koeffizienten q_{ijk} wird jetzt die Struktur der Block-Frobenius-Form nach Bild 3.1.3.1 noch einmal genauer untersucht. Wäre es möglich, die Steuerbarkeitsform ähnlich auf eine Steuerungsnormalform zu transformieren ohne ihre Struktur zu zerstören, dann wäre das Problem gelöst. Die Koeffizienten der Zählerpolynommatrix sind dann direkt aus der Beobachtungsmatrix zu entnehmen. Diese Transformation ist jedoch nur dann möglich, wenn die mit der kanonischen Zustandsraumdarstellung assoziierte Nennerpolynommatrix $\underline{P}(z)$ spaltenredu-

Um die Bedingung nach Gl. (3.1.4.15) zu gewährleisten, wurde die Ordnung des dritten Diagonalblockes auf $k = 4$ erhöht. Nun kann die Zustandssystemmatrix $\tilde{A}_{\text{BFF}}$ auf Steuerungsnormalform mit einseitiger Kopplung transformiert werden. Wenn mit den elementaren Ähnlichkeitstransformationen in Blockzeile und Blockspalte r begonnen wird, dann beeinflussen die Zeilen- und Spaltenoperationen jeweils nur das jeweilige Blockelement. Somit genügt es für die Herleitung der Transformation nur einen Block zu betrachten, um den gefundenen Algorithmus dann auf die Gesamtmatrix $\tilde{A}_{\text{BFF}}$ zu extrapolieren.

Will man im ersten Blockelement die senkrechte Anordnung der Frobenius-Ketten in eine waagerechte Anordnung transformieren, so erhält man die elementare Transformationsfolge

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{111} \\ & 1 & \gamma_{112} \\ & & 1 & \gamma_{113} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3,4 \\ \rightarrow \\ 4,3}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{111} \\ & 1 & \gamma_{113} & \gamma_{112} \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2,4 \\ \rightarrow \\ 4,2}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{112} & \gamma_{111} \\ & 1 & \gamma_{113} & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{2,3 \\ \rightarrow \\ 3,2}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{113} & \gamma_{112} & \gamma_{111} \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1,4 \\ \rightarrow \\ 4,1}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{111} & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{113} & \gamma_{112} & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{1,3 \\ \rightarrow \\ 3,1}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{112} & \gamma_{111} & \gamma_{110} \\ 1 & \gamma_{113} & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1,2 \\ \rightarrow \\ 2,1}} \begin{bmatrix} \gamma_{113} & \gamma_{112} & \gamma_{111} & \gamma_{110} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.1.4.18)
 \end{aligned}$$

Hierbei geben die Ziffern über dem Pfeil, im Sinne der in [Z4] benutzten Notation, die in der Elementaroperation zu addierenden Spalten an. Unterhalb des Pfeils sind die Indizes der Zeilen aufgeführt, die an der zur Ähnlichkeitstransformation ergänzenden elementare Zeilenoperation beteiligt sind. Die gesamte Ähnlichkeitstransformation

$$\tilde{\mathbf{A}}'_{11} = \mathbf{T}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \mathbf{T}_{11} \quad (3.1.4.19)$$

besitzt die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{113} & -\gamma_{112} & -\gamma_{111} \\ & 1 & -\gamma_{113} & -\gamma_{112} \\ & & 1 & -\gamma_{113} \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.4.20)$$

Noch besitzt die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}'_{11}$ in Gl. (3.1.4.18) nicht die gewohnte Form der Frobenius-Blöcke wie sie in [A1, K7] definiert ist. Die strukturellen 1-Elemente sollten in der Superdiagonalen und die charakteristischen Elemente sollten in der letzten Zeile des jeweiligen Blocks auftreten.

$$\mathbf{T}_S = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -\gamma_{111} & -\gamma_{112} & -\gamma_{113} & 1 & -\gamma_{121} & -\gamma_{122} & -\gamma_{123} & -\gamma_{131} & -\gamma_{132} & -\gamma_{133} \\ -\gamma_{112} & -\gamma_{113} & & & -\gamma_{122} & -\gamma_{123} & & -\gamma_{132} & -\gamma_{133} & \\ -\gamma_{113} & & & & -\gamma_{123} & & & -\gamma_{133} & & \\ 1 & & & & & & & & & \\ \hline & & & & -\gamma_{221} & -\gamma_{222} & -\gamma_{223} & 1 & -\gamma_{131} & -\gamma_{132} & -\gamma_{133} \\ & & & & -\gamma_{222} & -\gamma_{223} & & 1 & -\gamma_{132} & -\gamma_{133} & \\ & & & & -\gamma_{223} & & & 1 & -\gamma_{133} & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & -\gamma_{133} & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \end{array} \right]$$

Bild 3.1.3.2 Transformationsmatrix $\mathbf{T}_S$ zur Transformation von Block-Frobenius-Form zur Steuerungsnormalform zu Bild 3.1.3.1

Dies läßt sich jedoch einfach durch eine weitere Ähnlichkeitstransformation mit der an der Nebendiagonalen gespiegelten Einheitsmatrix

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & \cdot & \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{I}}^{-1} = \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.1.4.21)$$

erreichen. Die gesamte Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_S = [\mathbf{T}_{ij} \quad \tilde{\mathbf{I}}] \quad (3.1.4.22)$$

ergibt sich dann durch Zusammensetzen der Blocktransformationsmatrizen zu einer oberen Blockdreiecksmatrix. Für das System nach Bild 3.1.3.1 erhält man die Transformationsmatrix nach Bild 3.1.4.2.

Wenn man die Struktur von $\mathbf{T}_S$ und $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{BFF}}$ in den Bildern 3.1.4.1,2 in Betracht zieht, dann erkennt man, daß in der Beobachtungsmatrix der Steuerungsnormform

$$\mathbf{C}_S = \tilde{\mathbf{C}}_{\text{BFF}} \mathbf{T}_S \quad (3.1.4.23)$$

die zusätzlich eingeführten Nullspalten erhalten bleiben und keinen Beitrag zu den Polynomkoeffizienten $q_{ijk} = c_{sijk}$ leisten, so daß die Erhöhung der Ordnung der Zustandsraumdarstellung lediglich für die Herleitung des Algorithmus notwendig war. Für eine programmtechnische Ausführung ist ein explizites Aufstellen der Matrix $\mathbf{T}_S$ nicht erforderlich. Die Berechnung der Koeffizienten q_{ijk} kann direkt durchgeführt werden indem die Transformation spaltenweise erzeugt wird. Das in doppelter Genauigkeit auszuführende Skalarprodukt zwischen einer Spalte der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_S$ und einer Zeile der Beobachtungsmatrix $\mathbf{C}_{\text{BFF}}$ ergibt dann jeweils einen Koeffizienten der Zählerpolynommatrix $\underline{Q}(z)$.

Beispiel 3.1.4

Für die Block-Frobenius-Form aus Beispiel 3.1.3 ergibt sich mit

$$\mathbf{C}_{\text{BFF}} \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 11 \\ & & \\ & & \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ & & \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

und den bereits in Beispiel 3.1.2 ermittelten Zeilengraden der Nennerpolynommatrix $n_{z1}=2$, $n_{z2}=1$ und $n_{z3}=0$ das Rechtsprimmatrixprodukt in HermiteForm zu

$$\underline{Q}(z) \underline{P}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 8z - 7 & 3 & 0 \\ 4z - 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^2 - z & -z & 1 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

In diesem Abschnitt wurde eine numerische Methode angegeben, um einen in Struktur und Parametern eindeutigen Polynommatrixquotienten aus der Zustandsraumbeschreibung zu berechnen. Die erste Stufe des Verfahrens, in der eine Block-Hessenberg-Form der Systemmatrix erzeugt wird, erlaubt es, ähnlich wie für den Fall der gestaffelten Hessenberg-Form [H1], nicht steuerbare oder im dualen Fall nicht beobachtbare Systemanteile zu eliminieren. Weiterhin kann man die Strukturindizes, die hier als Hermite-Indizes bezeichnet wurden, aus diesem numerisch stabilisierbaren Transformationsschritt erhalten. In einem zweiten Schritt werden die Parameter der Polynommatrizen berechnet, wobei sich die Koeffizienten der Nennerpolynommatrix direkt aus den charakteristischen Spalten einer durch elementare Ähnlichkeitstransformation erzeugten Block-Frobenius-Form ablesen lassen. Die Parameter der Zählerpolynommatrix erhält man durch eine Linearkombination der Elemente der Beobachtungsmatrix der Steuerbarkeitsnormalform. Die numerische Berechnung kann "in place" durchgeführt werden und ist verglichen mit elementaren Polynommatrixoperationen [R2] auch numerisch effizient. Vorteilhaft bei der Darstellung des Polynommatrixquotienten durch die Hermite-Form erscheint die Dreiecksform der Nennerpolynommatrix.

Die nach der Transformation auf Block-Hessenberg-Form gestrichenen, nicht steuerbaren Systemanteile lassen sich aus Sicht der Polynommatrixbeschreibung als Teiler interpretieren. Wie der größte gemeinsame Teiler zweier Polynommatrizen direkt erhalten werden kann, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

3.2 Berechnung von größten gemeinsamen Teilern

In Abschnitt 3.1 wurde der Begriff des Primmatrixprodukts eingeführt. Die Wahl dieser Bezeichnung wurde damit begründet, daß das betrachtete Übertragungssystem steuerbar und beobachtbar sei. Die minimale dynamische Ordnung der Systembeschreibung kann nach [R2] auch mit der Abwesenheit sogenannter "abkoppelnder Nullstellen" oder mit der Teilerfremdheit der das System beschreibenden Polynommatrizen definiert werden. In diesem Abschnitt soll genauer auf die Primheit von Polynommatrixquotienten eingegangen werden. Dazu wird in einem ersten Unterabschnitt der Begriff des größten gemeinsamen Teilers definiert und eine Möglichkeit zur Konstruktion dieses Teilers aufgezeigt. In einem weiteren Unterabschnitt wird auf die verallgemeinerte Sylvester-Resultantenmatrix [A4] eingegangen, um damit ein numerisches Verfahren zur Konstruktion von größten gemeinsamen Teilern herzuleiten.

3.2.1 Definition und Konstruktion von größten gemeinsamen Teilern

Multipliziert man bei einem rechten Polynommatrixquotienten Zähler- und Nennerpolynommatrix mit einer beliebigen nichtsingulären in den Dimensionen passenden Polynommatrix $\underline{R}(z)$ von rechts, dann lautet die Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \underline{Q}(z) \underline{R}(z) (\underline{P}(z) \underline{R}(z))^{-1} \quad (3.2.1.1)$$

$$= \underline{Q}(z) \underline{R}(z) \underline{R}^{-1}(z) \underline{P}^{-1}(z). \quad (3.2.1.2)$$

Aus Gl. (3.2.1.2) wird deutlich, daß sich der beiden Polynommatrizen gemeinsame rechte Faktor in Hinsicht auf das Ein- und Ausgangsverhalten des Systems weghebt. Analog zur Berechnung von Übertragungsfunktionen mit nicht primen Zähler- und Nennerpolynomen, bei denen eine Kürzung von Pol- und Nullstellen auftritt, nennt man den Faktor $\underline{R}(z)$ Polynommatrixteiler. Wegen der Nichtkommutativität von Matrixprodukten wird dieser Faktor als rechter Teiler spezifiziert. Nun soll nach [K7] ein größter gemeinsamer Teiler definiert werden.

Definition 3.2.1

- a) Existieren Polynommatrizen $\tilde{\underline{P}}(z)$ und $\tilde{\underline{Q}}(z)$, so daß gilt

$$\underline{Q}(z) = \tilde{\underline{Q}}(z) \underline{R}(z), \quad (3.2.1.3a)$$

$$\underline{P}(z) = \tilde{\underline{P}}(z) \underline{R}(z), \quad (3.2.1.3b)$$

dann heißt $\underline{R}(z)$ rechter Teiler von $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$.

b) Existiert eine Polynommatrix $\underline{M}(z)$, so daß für jeden anderen rechten Teiler $\tilde{\underline{R}}(z)$

$$\underline{R}(z) = \underline{M}(z) \tilde{\underline{R}}(z)$$

gilt, dann ist $\underline{R}(z)$ durch jeden anderen rechten Teiler dividierbar und heißt größter gemeinsamer rechter Teiler (ggrT) zu $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$.

Da die Inverse einer Polynommatrix mit reellwertiger, von z unabhängiger Determinante wiederum eine unimodulare Polynommatrix ist, kann der ggrT $\underline{R}(z)$ in Gl. (3.2.1.1) mit unimodularen Polynommatrizen multipliziert werden und erfüllt dabei stets noch die Bedingungen a) und b) von Definition 3.2.1. Das bedeutet, daß der ggrT einer Polynommatrix nur bis auf die Postmultiplikation mit einer unimodularen Polynommatrix bestimmt werden kann.

Wie ein ggrT mittels elementarer Zeilenoperationen konstruiert werden kann, wird z.B. in [K2, K12] gezeigt. Der in Abschnitt 3.2.3 dargelegte Algorithmus basiert zwar auf einem anderen Ansatz, er ist jedoch nur eine besondere, numerisch stabilisierte Form der im folgenden geschilderten Vorgehensweise. Um den Teiler mittels unimodularer Transformation zu erhalten, werden die Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ des rechten Polynommatrixquotienten zu einer Hypermatrix

$$\underline{L}(z) = \begin{bmatrix} \underline{P}(z) \\ \underline{Q}(z) \end{bmatrix} \quad (3.2.1.4)$$

angeordnet. Diese $(r+m \times r)$ -Polynommatrix wird nun mittels elementarer Zeilenoperationen so transformiert, daß in den letzten m Zeilen die $(m \times r)$ -Nullmatrix erzeugt wird. Diese Transformation kann als Prämultiplikation mit einer unimodularen Polynommatrix $\underline{K}(z)$ durch

$$\underline{K}(z) \underline{L}(z) = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}(z) & \underline{K}_{12}(z) \\ \underline{K}_{21}(z) & \underline{K}_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}(z) \\ \underline{Q}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}(z) \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.1.5)$$

beschrieben werden. Mit

$$\tilde{\underline{K}}(z) = \underline{K}^{-1}(z) \quad (3.2.1.6)$$

gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{P}(z) \\ \underline{Q}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{K}}_{11}(z) & \tilde{\underline{K}}_{12}(z) \\ \tilde{\underline{K}}_{21}(z) & \tilde{\underline{K}}_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}(z) \\ \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (3.2.1.7)$$

Nach Definition 3.2.1a) ist $\underline{R}(z)$ ein rechter Teiler, denn aus Gl. (3.2.1.7) folgt

$$\underline{P}(z) = \tilde{\underline{K}}_{11}(z) \underline{R}(z), \quad \underline{Q}(z) = \tilde{\underline{K}}_{21}(z) \underline{R}(z). \quad (3.2.1.8)$$

Wäre nun $\tilde{\underline{R}}(z)$ ein anderer rechter Teiler, so daß gilt

$$\underline{P}(z) = \tilde{\underline{P}}(z) \tilde{\underline{R}}(z), \quad \underline{Q}(z) = \tilde{\underline{Q}}(z) \tilde{\underline{R}}(z), \quad (3.2.1.9)$$

dann folgt aus der Multiplikation der ersten Blockzeile in Gl. (3.2.1.5)

$$\underline{R}(z) = \underline{K}_{11}(z) \underline{P}(z) + \underline{K}_{12}(z) \underline{Q}(z) \quad (3.2.1.10)$$

für den rechten Teiler

$$\underline{R}(z) = (\underline{K}_{11}(z) \tilde{\underline{P}}(z) + \underline{K}_{12}(z) \tilde{\underline{Q}}(z)) \tilde{\underline{R}}(z), \quad (3.2.1.11)$$

so daß gemäß Definition 3.2.1b) $\underline{R}(z)$ ein größter gemeinsamer rechter Teiler ist.

Um die nicht stabilisierbaren elementaren Polynommatrixoperationen durch ein numerisch motiviertes Verfahren ersetzen zu können, wird im nächsten Abschnitt die verallgemeinerte Sylvester-Resultantenmatrix eingeführt.

3.2.2 Verallgemeinerte Sylvester-Resultantenmatrizen zur numerischen Berechnung größter gemeinsamer Teiler

Resultantenmatrizen sind in der Theorie linearer Systeme weit verbreitet, insbesondere für den Test von Polynomem auf Stabilität, Positivität und Primtheit [B1]. Entsprechende Theoreme für den Eingrößenfall wurden für den Mehrgrößenfall erweitert, z.B. wurde in [W9] eine Sylvester-Matrix, die

sogenannte Eliminantenmatrix, angegeben, deren Rang Aussagen über die Primheit von Polynommatrizen liefert. Hier wird eine abgeänderte Form dieser Matrix nach [B5, A4] benutzt, die dem hier vorliegenden Problem angepaßt ist.

Um die Sylvester-Matrix aufzustellen, wird die zweite Blockzeile von Gl. (3.2.1.5) betrachtet und in der Form

$$\underline{B}(z) \underline{P}(z) + \underline{A}(z) \underline{Q}(z) = \underline{0}, \quad (3.2.2.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{B} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], & \underline{A} &\in \mathbb{R}^{m \times m}[z], \\ \underline{P} &\in \mathbb{R}^{r \times r}[z], & \underline{Q} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \end{aligned}$$

geschrieben, so daß auf die Indizierung der K_{ij} verzichtet werden kann. Mit Gl. (3.2.2.1) folgt, daß die Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ dann rechtsprim sind, wenn zwei Polynommatrizen $\underline{B}(z)$ und $\underline{A}(z)$ existieren, für die gilt

- a) $\underline{B}(z)$ und $\underline{A}(z)$ sind linksprim
- b) $\underline{A}(z)$ ist zeilenreduziert
- c) $\underline{A}(z)$ besitzt den gleichen Determinantengrad wie $\underline{P}(z)$.

Nun werden $\underline{A}(z)$ und $\underline{P}(z)$ in Form der Matrizenpolynome

$$\underline{A}(z) = \sum_{i=0}^k \underline{A}_i z^i, \quad k = \max (\text{grad}_{ij} \underline{A}(z)), \quad (3.2.2.2)$$

$$\underline{P}(z) = \sum_{i=0}^n \underline{P}_i z^i, \quad n = \max (\text{grad}_{ij} \underline{P}(z)), \quad (3.2.2.2)$$

dargestellt. Da hier angenommen wird, daß durch die Polynommatrizen ein realisierbares Übertragungssystem $\underline{G}(z) = \underline{A}^{-1}(z)\underline{B}(z) = -\underline{Q}(z)\underline{P}^{-1}(z)$ beschrieben wird, kann die entsprechende Darstellung auch für $\underline{B}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ gewählt werden. Dann ergibt ein Vergleich der Matrixkoeffizienten gemäß Gl. (3.2.2.1) das lineare Gleichungssystem

$$[\underline{B}_0 \quad \underline{A}_0 \quad \underline{B}_1 \quad \underline{A}_1 \quad \dots \quad \underline{A}_k \quad \underline{B}_k] \underline{S}_k = \underline{0}, \quad (3.2.2.3)$$

worin $\underline{S}_k$ als verallgemeinerte Sylvester-Resultantenmatrix bezeichnet wird.

Für die Struktur dieser Block-Töplitz-Matrix gilt

$$\underline{S}_k = \begin{bmatrix} \underline{P}_n & \underline{P}_{n-1} & \dots & \underline{P}_0 & \underline{Q} & \dots & \underline{Q} \\ \underline{Q}_n & \underline{Q}_{n-1} & \dots & \underline{Q}_0 & \underline{Q} & \dots & \underline{Q} \\ \underline{Q} & \underline{P}_n & \dots & \underline{P}_1 & \underline{P}_0 & \underline{Q} & \dots & \underline{Q} \\ \underline{Q} & \underline{Q}_n & \dots & \underline{Q}_1 & \underline{Q}_0 & \underline{Q} & \dots & \underline{Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \underline{Q} & \underline{Q} & \dots & \underline{P}_n & \underline{P}_{n-1} & \dots & \underline{P}_0 & \\ \underline{Q} & \underline{Q} & \dots & \underline{Q}_n & \underline{Q}_{n-1} & \dots & \underline{Q}_0 & \end{bmatrix} . \quad (3.2.2.4)$$

Die Sylvester-Matrix besitzt k Blockzeilen

$$\underline{S}_k = \begin{bmatrix} \underline{S}_{k,1} \\ \underline{S}_{k,2} \\ \vdots \\ \underline{S}_{k,k} \end{bmatrix} , \quad (3.2.2.5)$$

die jeweils aus den erweiterten Koeffizientenmatrizen der Hypermatrix, Gl. (3.2.2.4), gebildet werden. Interpretiert man die Blockmatrixkoeffizienten in Gl. (3.2.2.5) als Koeffizienten eines Matrixpolynoms und definiert die rekursive Beziehung

$$\underline{S}_{k,k}(z) = \underline{L}(z),$$

$$\underline{S}_{k,i-1}(z) = z \underline{S}_{k,i}(z) , \quad i = 2, \dots, k , \quad (3.2.2.6)$$

dann entsprechen elementare reelle Matrizenoperationen ausgeführt auf die Sylvester-Matrix, Gl. (3.2.2.4), elementaren Polynommatrizenoperationen für die Polynommatrix $\underline{L}(z)$ nach Gl. (3.2.1.4). Ist es unter der Annahme, daß k genügend groß wäre, möglich, $\underline{S}_k$ so zu bearbeiten, daß in der letzten Blockzeile $\underline{S}_{k,k}$ m Nullzeilen und r linear unabhängige Zeilen erzeugt werden, dann kann man nach Gl. (3.2.1.5) aussagen, daß diese r Zeilen die erweiterte Koeffizientenmatrix eines größten gemeinsamen rechten Teilers bilden. Denn diese Untermatrix $\tilde{\underline{S}}_{k,k}$ ist nach Gl. (3.2.2.5) ein unimodulares Vielfaches der Polynommatrix $\underline{L}(z)$.

Offen ist jetzt noch das Problem, wie groß k sein muß und wie diese Transformation durchgeführt werden soll. Eine Aussage über die Anzahl der benötigten Blockzeilen ist möglich, wenn man den linken Nullraum von $\underline{L}(z)$ betrachtet. Dieser ist durch die linken Kroneckerindizes η_1 [K7], die nach [R2] minimale Indizes oder nach [F3] auch duale dynamische Indizes genannt werden, in seiner Struktur festgelegt. Für propere Systeme koinzidieren diese Systeminvarianten mit den Beobachtbarkeitsindizes und können nach [B5] mit dem Rang der Sylvester-Matrix $\underline{S}_k$ verknüpft werden. Danach gilt

$$\text{Rang } \underline{S}_k = (r+1)k - \sum_{(i: \eta_1 < k)} (k - \eta_1), \quad (3.2.2.7)$$

was bedeutet, daß der Rang der $\underline{S}_1$ wächst, bis k den Beobachtbarkeitsindex η erreicht hat. Danach beginnt der Nullraum zu wachsen. Nach [B5] kann gezeigt werden, daß

$$\text{Rang } \underline{S}_{\eta+1} - \text{Rang } \underline{S}_{\eta} \leq r$$

gilt, woraus folgt, daß $k=\eta+1$ gewählt werden muß, um einen größten gemeinsamen rechten Teiler zu berechnen.

Nun bleibt noch der Ablauf der Transformation anzugeben, um aus der letzten Blockzeile von $\underline{S}_{\eta+1}$ die Koeffizienten der Teilerpolynommatrix zu erhalten. Hierzu wird, wie bei [K15], die Invarianz der Töplitz-Matrix gegen Verschieben der Blockzeilen ausgenutzt, um blockweise zu arbeiten. Dieses Vorgehen ist auch unbedingt erforderlich, da der größte rechte Kroneckerindex im allgemeinen nicht von vornherein bekannt ist. Damit wird der Rangtest sukzessive auf die Sylvester-Matrizen $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_{\eta+1}$ ausgeführt, indem die Blockzeilen mittels Gauß-Elimination auf Stufenform transformiert werden.

So wird zunächst $\underline{S}_1$ auf Stufenform $\underline{E}_1$ gebracht. $\underline{S}_2$ wird dann nicht, gemäß Gl. (3.2.2.4), komplett neu aufgestellt. Vielmehr wird die zur Matrix $\underline{E}_1$ hinführende Transformation, die auch für die Quasitriangularisierung von $\underline{S}_2$ notwendig wäre, ausgenutzt, indem sofort

$$\tilde{\underline{S}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \tilde{\underline{E}}_1 \end{bmatrix}$$

aufgestellt wird. In dieser Matrix ist die erste Blockzeile schon in Stufenform und die zweite Blockzeile ergibt sich aus der ersten durch

Verschiebung um r Spalten nach rechts. Für $r = m = 2$ ist die Struktur dieser Matrix in Bild 3.2.2.1 veranschaulicht.

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{\tilde{E}}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cc} \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ & & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ & & & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & & & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & & & & \otimes & x & x & x & x & x & x & x & x \end{array} \right]$$

Bild 3.2.2.1 Stufenform der Sylvester-Matrix im Rangtest

Die blockweise Bearbeitung kann jedoch auch auf andere Weise motiviert werden. Wenn in einer Blockzeile mit Index i Operationen ausgeführt werden, können gedanklich die gleichen Operationen in allen darunter liegenden Blockzeilen $i+1, \dots, k$ ausgeführt werden, denn in der Gauß-Elimination existiert für jeden Zeilensummanden auch ein entsprechend verschobener Summand. Die Vorgehensweise soll in einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 3.2.2.1

Gegeben sei der rechte Polynommatrixquotient

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} 2z+1 & z^2+1 \\ z^2+2z+1 & z^2+2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z^2+3z+5 & z^3+4z+2 \\ z^2+z-1 & z^2+z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{Q}(z) \underline{P}^{-1}(z) .$$

Damit erhält man die Sylvester-Matrix

Da das System als größten dualen dynamischen Index den Beobachtbarkeitsindex 2 besitzt, ist zu erwarten, daß in $\underline{S}_3$ die zweite linear abhängige Zeile entsteht, so daß sich schließlich die Stufenform von $\tilde{\underline{E}}_2$ zu

$$\underline{E}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] .$$

ergibt. Die ersten beiden Zeilen von $\underline{E}_3$ enthalten die Koeffizienten des größten gemeinsamen rechten Teilers

$$\underline{R}(z) = \left[\begin{array}{cc} 2z + 5 & 3z + 2 \\ 1.5 & 1.5z \end{array} \right] .$$

In Beispiel 3.2.2.1 wird für die Teilerberechnung eines nicht minimalen Systems der Ordnung 4 ein Feld der Dimension 12×12 benötigt. Für nicht triviale Systeme ist der Speicherplatzbedarf für das Aufstellen der Sylvester-Matrix erheblich. Nun enthält ihre Stufenform sehr viele redundante Elemente und ein numerisches Verfahren sollte diese Struktureigenschaft beachten, um den Speicherplatzbedarf für diesen Algorithmus zu verringern. Redundant sind

- 1) sämtliche Nullzeilen, die im Verlauf des Rangtests entstehen,
- 2) alle Zeilen oberhalb des aktuell zu bearbeitenden Blocks $\tilde{\underline{E}}_i$, deren Pivotspaltenindex geringer als der kleinste Pivotspaltenindex in $\tilde{\underline{E}}_i$ ist,
- 3) alle $(r+m) \times m$ -Nullblöcke, die durch Verschiebung vor den $\tilde{\underline{E}}_i$ und hinter den $\underline{E}_i$ entstehen.

Für die Faktorisierung der Sylvester-Matrix können keine Algorithmen für Toplitz-Matrizen genutzt werden, da die $\underline{S}_i$ Blockstruktur besitzen und ihre Dimension im allgemeinen unbekannt ist. Auch ohne auf allgemeine Routinen für schwach besetzte Matrizen zurückzugreifen, kann man durch eine spe-

zielle Verwaltung der Zeilen der Sylvester-Matrix erheblich Speicherplatz einsparen, indem man die Redundanz wie folgt beseitigt:

- 1) Es sind nur Zeilen in den nächsten Block zu verschieben, die ein Pivotelement enthalten.
- 2) Nach Aufbau des nächsten Blocks ist die gesamte Struktur nach oben zu verschieben, so daß die in der Transformationsfolge nicht mehr benötigten Zeilen überschrieben werden.
- 3) Das Einrücken der Blockmatrizen nach rechts braucht nicht durchgeführt zu werden, wenn man für jeden einzelnen Zeilenvektor seine Anfangsposition verwaltet und jede numerische Operation unter Berücksichtigung dieses "Pseudoshifts" durchführt.

Damit wird die Spaltendimension des Feldes für die Block-Töplitz-Matrizen $\underline{S}$ zu $n_1 = (n + 1) r$ festgelegt, wobei n den maximalen Grad der Matrixpolynome bezeichnet. Für die Zeilendimension läßt sich keine einfache Aussage machen. Im ungünstigsten Fall kann der Beobachtbarkeitsindex $n_{\max}$ in der Größenordnung von $(n \cdot r)$ sein, so daß eine entsprechende Anzahl von Blöcken mit $(m+r)$ Zeilen aufgestellt werden muß. Jedoch zeigten praktische Untersuchungen, daß die Zeilendimension $n_2 = 2 n_1$ selten überschritten wird.

Beispiel 3.2.2.2

Die Ausführung des ersten Schrittes, d.h. die Transformation der ersten Blockzeile auf Stufenform ist identisch mit Beispiel 3.2.2.1. Jedoch werden die ersten zwei Zeilen von $\underline{E}_1$ für die Bearbeitung von $\tilde{\underline{S}}_2$ nicht mehr benötigt. Damit läßt sich durch Streichung der redundanten Zeilen und durch Ersetzen der Verschiebung durch Merken der Spaltenposition des Pivotelements das Feld $\hat{\underline{S}}_2$ aufstellen. Man erhält

Pivot-index	Pseudo-shift
4	0
5	0
4	1
5	1
6	1
7	1

$$= \hat{\underline{S}}_2$$

0	0	0	1	2	0	1	1
0	0	0	0	1	1	2	1
0	1	2	0	3	4	5	2
0	0	1	1	1	1	-1	-1
0	0	0	1	2	0	1	1
0	0	0	0	1	1	2	1

Die Dimension dieses Feldes beträgt (6×8) und ist die maximale Dimension, die im Verlauf der Rechnung auftritt. Im Gegensatz zu Beispiel 3.2.2.1 benötigt das Feld für die dritte Verschiebung nicht mehr zwölf sondern nur vier Zeilen. Hier ergibt sich

Pivot-index	Pseudo-shift
8	2
8	3
9	3
10	3

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1
 \end{bmatrix} = \hat{\underline{S}}_3$$

Mit dem in diesem Abschnitt angegebenen Verfahren, steht eine Methode zur Verfügung, um einen gegebenen Polynommatrixquotienten auf Primheit zu überprüfen. Weiterhin können aus der Polynommatrix des Teilers mit den in Abschnitt 3.6 vorgestellten Algorithmen der Grad sowie die Nullstellen des Teilers, die man auch als abkoppelnde Nullstellen [R2] bezeichnet, bestimmt werden.

3.3 Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung

In der mathematischen Zahlentheorie bezeichnet man als "diophantische Gleichung" Gleichungssysteme des Typs

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad n \geq 2, \quad \text{für}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ Polynom aus } \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

wenn man verlangt, die ganzzahligen Lösungen zu ermitteln. So ist z.B.

$$a x_1 + b x_2 = c, \quad a, b, c, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad n = 2,$$

eine diophantische Gleichung. Da ähnlich wie bei ganzen Zahlen auch für Polynome und Polynommatrizen ein Ring definiert wird, wurde in der regelungstechnischen Systemtheorie [W14, K17, K18] für Gleichungen dieser Struktur, deren Koeffizienten und Lösungen durch Polynommatrizen gebildet werden, diese Bezeichnung übernommen.

Unter einer unilateralen diophantischen Polynommatrizengleichung versteht man ein Gleichungssystem des Typs

$$\underline{\underline{A}}(z) \underline{\underline{P}}(z) + \underline{\underline{B}}(z) \underline{\underline{Q}}(z) = \underline{\underline{R}}(z) \quad (3.3.1)$$

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times k}[z], \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}[z], \quad \underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{m \times r}[z],$$

$$\underline{\underline{P}} \in \mathbb{R}^{k \times r}[z], \quad \underline{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{1 \times r}[z],$$

$\underline{\underline{A}}(z)$, $\underline{\underline{B}}(z)$ und $\underline{\underline{R}}(z)$ sind gegebene Polynommatrizen, $\underline{\underline{P}}(z)$ und $\underline{\underline{Q}}(z)$ werden gesucht. Das duale Problem

$$\underline{\underline{P}}_1(z) \underline{\underline{A}}_1(z) + \underline{\underline{Q}}_1(z) \underline{\underline{B}}_1(z) = \underline{\underline{R}}_1(z) \quad (3.3.2)$$

$$\underline{\underline{A}}_1 \in \mathbb{R}^{k \times r}[z], \quad \underline{\underline{B}}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times r}[z], \quad \underline{\underline{R}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}[z],$$

$$\underline{\underline{P}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times k}[z], \quad \underline{\underline{Q}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times 1}[z]$$

kann durch Transponieren beider Seiten von Gl. (3.3.2) gemäß

$$\underline{\underline{A}}_1^T(z) \underline{\underline{P}}_1^T(z) + \underline{\underline{B}}_1^T(z) \underline{\underline{Q}}_1^T(z) = \underline{\underline{R}}_1^T(z) \quad (3.3.3)$$

auf Gl. (3.3.1) zurückgeführt werden, so daß es keiner besonderen Betrachtung bedarf.

Viele Analyse- und Syntheseprobleme in Zusammenhang mit Systemen in der Polynommatrizenbeschreibung können auf die Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung zurückgeführt werden [K7, K15, C3, K2]. Das sind unter anderem

- die duale prime Faktorisierung, mit $\underline{R}(z) = \underline{0}$, die der Minimalrealisierung in der Zustandsraumdarstellung entspricht,
- die Polynommatrizendivision, mit $\underline{B}(z) = \underline{I}$,
- der Regler- und Beobachterentwurf mittels Polvorgabe, $\underline{R}(z)$ enthält die Pole des geschlossenen Regelkreises und die Beobachterpole als invariante Nullstellen,
- der Reglerentwurf auf endliche Einstellzeit, $\underline{R}(z)$ entspricht dabei der z-Transformierten eines Führungssignals.

In diesem Abschnitt werden drei Verfahren zur Lösung von Gl. (3.3.1) vorgestellt, die von grundsätzlich verschiedenen Ansätzen ausgehen. Auf die Lösung durch elementare Äquivalenztransformationen wird in Abschnitt 3.3.2 nur kurz eingegangen. Ausführlich behandelt werden dagegen in Abschnitt 3.3.3.1 und 3.3.4.1 das auf dem Strukturtheorem [W13, W10] basierende Verfahren [S4], das die Lösung mittels einer Zustandsraumrealisierung erzielt, und das Verfahren über die Popov-Stufenform nach [K15], bei dem die Berechnung der Lösung von Gl. (3.3.1) über die Konstruktion einer minimalen Basis des Nullraums der Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ erfolgt. In den Abschnitten 3.3.3.2 und 3.3.4.2 wird erläutert, welche Modifikationen zur praktischen Rechnerimplementierung der beiden letzten Verfahren vorgenommen werden müssen. Bevor jedoch die numerischen Algorithmen beschrieben werden, sollen im nächsten Abschnitt noch einige wichtige Eigenschaften der unilateralen Gleichung angegeben werden. Dabei sollen insbesondere die bei der Lösung dieser Gleichung zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade aufgezeigt werden. Das ist für die damit formulierten Syntheseverfahren wichtig, denn diese lassen sich, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt wird, regelungstechnisch sinnvoll nutzen. Weiterhin ist die Frage nach den Voraussetzungen zur Lösbarkeit von Gl. (3.3.1) zu beantworten, denn ein numerisches Verfahren muß nicht nur eine Lösung ermitteln, sondern auch auf unzulässige oder nicht sinnvolle Eingabedaten reagieren können.

3.3.1 Eigenschaften der unilateralen diophantischen Gleichung

Lösbarkeit

Nach einem Satz der linearen Algebra, der sogenannten Bezout-Identität [K7, K15], kann man für zwei linksprime Polynommatrizen $\underline{A}_1(z)$ und $\underline{B}_1(z)$ stets zwei rechtsprime Polynommatrizen $\underline{P}_0(z)$ und $\underline{Q}_0(z)$ finden, so daß gilt

$$\underline{A}_1(z) \underline{P}_0(z) + \underline{B}_1(z) \underline{Q}_0(z) = \underline{I}. \quad (3.3.1.1)$$

Es sei nun $\underline{L}(z)$ der größte gemeinsame linke Teiler (ggLT) der Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$, so daß gilt

$$\underline{A}(z) = \underline{L}(z) \underline{A}_1(z),$$

$$\underline{B}(z) = \underline{L}(z) \underline{B}_1(z).$$

Durch Einsetzen in Gl. (3.3.1.1) erkennt man sofort, daß diese Gleichung nur lösbar ist, wenn $\underline{L}(z)$ ein linker Teiler von $\underline{R}(z)$ ist, denn man erhält

$$\underline{A}(z) \underline{P}(z) + \underline{B}(z) \underline{Q}(z) = \underline{L}(z) (\underline{A}_1(z) \underline{P}(z) + \underline{B}_1(z) \underline{Q}(z)) = \underline{R}(z)$$

$$\underline{R}(z) = \underline{L}(z) \underline{R}_1(z)$$

$$\underline{A}_1(z) \underline{P}(z) + \underline{B}_1(z) \underline{Q}(z) = \underline{R}_1(z).$$

Eine spezielle Lösung der Gl. (3.3.1) ist z.B. durch

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0(z) \underline{R}_1(z), \quad \underline{Q}(z) = \underline{Q}_0(z) \underline{R}_1(z).$$

gegeben. Diese Überlegungen führen auf folgende Aussage über die Lösbarkeit der unilateralen diophantischen Gleichung:

Gl. (3.3.1) ist genau dann lösbar, wenn der größte gemeinsame linke Teiler $\underline{L}(z)$ von $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ ein linker Teiler von $\underline{R}(z)$ ist.

Damit kann man vornherein durch Berechnung des ggLT nach Abschnitt 3.2 eine Entscheidung über die Lösbarkeit treffen. Wie man ohne diesen zusätzlichen Aufwand die Lösbarkeit direkt mit den Mitteln der für die Lösung verwendeten numerischen Algorithmen feststellen kann, ist in Abschnitt 3.3.3.2 und in Anhang A3 beschrieben.

Die allgemeine Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung

Wie im folgenden gezeigt wird, hat die unilaterale Polynommatrizengleichung im allgemeinen keine eindeutige Lösung, sondern es existiert eine Vielfalt von Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$, die der Gl. (3.3.1) genügen. Die dadurch entstehenden Freiheitsgrade kann man ausnutzen, um bestimmte regelungstechnische Zusatzanforderungen an die realisierten Systeme zu erfüllen. In [K15, K3] wird z.B. gezeigt, wie man mit Hilfe dieser allgemeinen Lösung eine Stellgrößenbegrenzung bei einem auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreis durchführen kann. Auch in dieser Arbeit wird diese Eigenschaft in Abschnitt 5.2 ausgenutzt, um den ersten Stellschritt des Reglers festzulegen oder den Regler realisierbar zu machen.

Gegeben seien zwei rechtsprime Polynommatrizen $\underline{P}_r(z)$ und $\underline{Q}_r(z)$, so daß gilt

$$\underline{A}(z) \underline{Q}_r(z) = \underline{B}(z) \underline{P}_r(z)$$

und mit $\underline{P}_0(z)$, $\underline{Q}_0(z)$ sei eine spezielle Lösung von Gl. (3.3.1) bekannt. Dann lautet die allgemeine Lösung der unilateralen Gleichung, Gl. (3.3.1),

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0(z) - \underline{Q}_r(z) \underline{T}(z) \quad (3.3.1.2.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{Q}_0(z) + \underline{P}_r(z) \underline{T}(z). \quad (3.3.1.2.b)$$

$\underline{T}(z)$ ist eine beliebig wählbare, eventuell gebrochen rationale, Polynommatrix mit passenden Dimension. Die Gültigkeit der allgemeinen Lösung kann man durch Einsetzen von Gl. (3.3.1.2.a,b) in Gl. (3.3.1) zeigen, denn damit gilt

$$\begin{aligned} \underline{A}(z)\underline{P}(z) + \underline{B}(z)\underline{Q}(z) &= \underline{A}(z)(\underline{P}_0(z) - \underline{Q}_r(z)\underline{T}(z)) + \underline{B}(z)(\underline{Q}_0(z) + \underline{P}_r(z)\underline{T}(z)) \\ &= \underline{A}(z)\underline{P}_0(z) + \underline{B}(z)\underline{Q}_0(z) + (\underline{B}(z)\underline{P}_r(z) - \underline{A}(z)\underline{Q}_r(z)) \underline{T}(z) \\ &= \underline{A}(z) \underline{P}_0(z) + \underline{B}(z) \underline{Q}_0(z) = \underline{R}(z), \end{aligned}$$

so daß man wiederum die als gültig vorausgesetzte spezielle Lösung erhält.

Lösung minimalen Grades

Von besonderer Bedeutung sind in der Regelungstechnik oft Lösungen, bei denen eine der beiden Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ oder $\underline{Q}(z)$ den kleinstmöglichen Determinantengrad hat. Nichtminimale Lösungen führen z.B. beim Entwurf eines Kompensators nach [K7] zu keiner echt rationalen und damit auch nicht

realisierbaren Reglerübertragungsmatrix. Lösungen minimalen Grades kann man ausgehend von einer speziellen Lösung $\underline{P}_0(z)$, $\underline{Q}_0(z)$ finden, indem man einen Divisionsalgorithmus anwendet und dann $\underline{T}(z)$ geeignet wählt.

Für die Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{P}(z)$ setzt man diese Polynommatrix in der allgemeinen Form

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0(z) - \underline{Q}_r(z) \underline{T}(z) \quad (3.3.1.3)$$

an. Falls $\underline{Q}_r(z)$ zeilenreduziert ist, kann man durch eine linke Division von $\underline{P}_0(z)$ durch $\underline{Q}_r(z)$ zwei Polynommatrizen $\underline{U}_1(z)$ und $\underline{V}_1(z)$ berechnen, so daß gilt

$$\underline{P}_0(z) = \underline{Q}_r(z) \underline{U}_1(z) + \underline{V}_1(z), \text{ mit } \text{grad}_{zi} \underline{V}_1(z) < \text{grad}_{zi} \underline{Q}_r(z).$$

Durch Einsetzen in die allgemeine Lösung, Gl. (3.3.1.2), kann man leicht nachprüfen, daß mit $\underline{T}(z) = \underline{U}_1(z)$ eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{P}(z)$ entsteht, denn hierfür gilt

$$\underline{P}(z) = \underline{V}_1(z) \quad (3.3.1.4.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{Q}_0(z) + \underline{P}_r(z) \underline{U}_1(z). \quad (3.3.1.4.b)$$

Auf die gleiche Weise kann man auch Lösungen minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ finden. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, daß Lösungen minimalen Grades eindeutig sind. Für einen Beweis dieser Aussage sei hier lediglich auf [K15] verwiesen.

Nicht-propere Systeme

Die in dieser Arbeit genutzten Algorithmen liefern Lösungen minimalen Grades. Voraussetzung dafür ist jedoch, daß die Polynommatrix $\underline{A}(z)$ quadratisch und nichtsingulär ist, sowie daß das System $\{\underline{A}, \underline{B}\}$ proper ist. Bei der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Methode muß zusätzlich auch noch das erweiterte System mit der Hypermatrix $[\underline{B} \ \underline{R}]$ als Zählermatrix proper sein. Aber auch für nicht-propere Systeme kann man Lösungen finden, wenn die Systeme $\{\underline{A}, \underline{B}\}$ und $\{\underline{A}, \underline{R}\}$ in einen streng properen Anteil und eine Polynommatrix $\underline{D}_b(z)$ bzw. $\underline{D}_r(z)$, die den nicht echt rationalen Anteil des Systems beschreibt, zerlegt werden. Dann gilt

$$\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{B}_S(z) + \underline{D}_b(z), \quad (3.3.1.5.a)$$

$$\underline{A}^{-1}(z) \underline{R}(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{R}_S(z) + \underline{D}_r(z) \quad (3.3.1.5.b)$$

mit $\underline{A}^{-1} \underline{B}_S$ und $\underline{A}^{-1} \underline{R}_S$ streng proper. Die Matrizen $\underline{B}_S(z)$, $\underline{R}_S(z)$, $\underline{D}_b(z)$ und $\underline{D}_r(z)$ können durch eine linke Polynommatrizendivision zu

$$\underline{B}(z) = \underline{A}(z) \underline{D}_b(z) + \underline{B}_S(z),$$

$$\underline{R}(z) = \underline{A}(z) \underline{D}_r(z) + \underline{R}_S(z)$$

bestimmt werden. Hierbei gilt für die Zeilengrade

$$\text{grad}_{zi} \underline{B}_S(z) < \text{grad}_{zi} \underline{A}(z), \quad \text{grad}_{zi} \underline{R}_S(z) < \text{grad}_{zi} \underline{A}(z).$$

Die Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ für Gl. (3.3.1) lautet hiermit

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_S(z) + \underline{D}_r(z) - \underline{D}_b(z) \underline{Q}(z) \quad (3.3.1.6.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{Q}_S(z), \quad (3.3.1.6.b)$$

wobei $\underline{P}_S(z)$ und $\underline{Q}_S(z)$ eine Lösung der unilateralen Gleichung mit streng properen Systemen $\{\underline{A}, \underline{B}_S\}$ und $\{\underline{A}, \underline{R}_S\}$ sind. Dann gilt

$$\underline{A}(z) \underline{P}_S(z) + \underline{B}_S(z) \underline{Q}_S(z) = \underline{R}_S(z),$$

was man wiederum durch Einsetzen und Umformen gemäß

$$\underline{A}(\underline{P}_S + \underline{D}_r - \underline{D}_b \underline{Q}_S) + (\underline{A} \underline{D}_b + \underline{B}_S) \underline{Q}_S = \underline{A} \underline{D}_r + \underline{R}_S$$

$$\underline{A} \underline{P}_S + \underline{A} \underline{D}_r - \underline{A} \underline{D}_b \underline{Q}_S + \underline{A} \underline{D}_b \underline{Q}_S + \underline{B}_S \underline{Q}_S = \underline{A} \underline{D}_r + \underline{R}_S$$

$$\underline{A} \underline{P}_S + \underline{B}_S \underline{Q}_S = \underline{R}_S$$

verifizieren kann.

3.3.2 Lösung mittels elementarer Äquivalenztransformationen

Der einfachste und nächstliegende Weg, eine Lösung für die unilaterale Gleichung zu finden, besteht darin, die Polynommatrizensysteme durch elementare Äquivalenztransformationen soweit zu vereinfachen, daß die Lösung direkt aus den Transformationsmatrizen abgelesen werden kann. Diese Methode wird z.B. in [K2, K15] benutzt und ist dort ausführlich dargestellt. Elementartransformationen sind theoretisch sehr allgemein anwendbar. Wie im

folgenden gezeigt wird, kann man mit ihnen auch Lösungen für nicht quadratische Polynommatrizen $\underline{\underline{A}}(z)$ und $\underline{\underline{B}}(z)$ und nicht propere Systeme $\{\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\}$ und $\{\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{R}}\}$ finden. Ein Nachteil ist, daß die gefundenen Lösungen nicht - wie in der Regelungstechnik meist gefordert - minimal sind. Um minimale Lösungen zu finden muß man nach Berechnung einer Lösung stets noch eine Polynommatrizendivision durchführen. Da die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Algorithmen nicht auf elementaren Äquivalenztransformationen beruhen, sollen diese hier nur kurz erläutert werden. Zusätzlich soll herausgestellt werden, daß diese Art von Transformationen numerisch unattraktiv sind.

Um eine Lösung für Gl. (3.3.1) zu finden, stellt man die Blockmatrix Gl. (3.3.2.1) auf und führt so lange Spaltenoperationen durch, bis in der ersten Zeile nur noch der größte gemeinsame linke Teiler $\underline{\underline{L}}(z)$ von $\underline{\underline{A}}(z)$ und $\underline{\underline{B}}(z)$ übrig bleibt. Die Durchführung der Transformation kann z.B. als Gauß-Algorithmus zur Quasi-Triangularisierung der ersten Blockzeile der Matrix, Gl. (3.3.2.1) formuliert werden. In der unteren Einheitsmatrix der Dimension $(k+l+r)$ werden die Spaltenoperationen akkumuliert. Diese Transformation kann formal durch

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} m \\ k \\ l \\ r \end{array} \begin{array}{c} k \quad l \quad r \\ \left[\begin{array}{ccc} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{R}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{array} \right] \\ (3.3.2.1) \end{array} & \xrightarrow{R} & \begin{array}{c} k \quad l \quad r \\ \left[\begin{array}{ccc} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} & -\underline{\underline{P}}_0 \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} & -\underline{\underline{Q}}_0 \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{array} \right] \\ (3.3.2.2) \end{array} \xrightarrow{R} \begin{array}{c} m \quad k+l-m \quad r \\ \left[\begin{array}{ccc} \underline{\underline{L}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{P}}_1 & \underline{\underline{B}}_r & -\underline{\underline{P}}_0 \\ \underline{\underline{Q}}_1 & -\underline{\underline{A}}_r & -\underline{\underline{Q}}_0 \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{array} \right] \\ (3.3.2.3) \end{array}
 \end{array}$$

beschrieben werden. Betrachtet man die Blockmatrix in Gl. (3.3.2.3), so entsprechen die bis dahin durchgeführten Spaltenoperation der Polynommatrizengleichung

$$\left[\underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \quad \underline{\underline{R}} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_1 & \underline{\underline{B}}_r & -\underline{\underline{P}}_0 \\ \underline{\underline{Q}}_1 & -\underline{\underline{A}}_r & -\underline{\underline{Q}}_0 \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{L}} \quad \underline{\underline{O}} \quad \underline{\underline{O}} \right].$$

Bildet man die Skalarprodukte der drei Blockspalten, dann erhält man aus der ersten Blockspalte den größten gemeinsamen linken Teiler $\underline{\underline{L}}(z)$, da hierfür gilt

$$\underline{A}(z) \underline{P}_1(z) + \underline{B}(z) \underline{Q}_1(z) = \underline{L}(z).$$

Die zweite Spalte liefert das rechte Primmatrixprodukt $\underline{B}_r(z) \underline{A}_r^{-1}(z)$ gemäß

$$\underline{A}(z) \underline{B}_r(z) - \underline{B}(z) \underline{A}_r(z) = \underline{0} ,$$

und eine spezielle Lösung $\{\underline{P}_0(z), \underline{Q}_0(z)\}$ der unilateralen Gleichung kann man aus der dritten Blockzeile

$$\underline{A}(z) \underline{P}_0(z) + \underline{B}(z) \underline{Q}_0(z) = \underline{R}(z)$$

entnehmen. Die spezielle Lösung von Gl. (3.3.1), nämlich $\underline{P}_0(z)$ und $\underline{Q}_0(z)$, kann zwar bereits aus der Blockmatrix Gl. (3.3.2.2) abgelesen werden. Wird jedoch die allgemeine Lösung

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0(z) - \underline{Q}_r(z) \underline{T}(z)$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{Q}_0(z) + \underline{A}_r(z) \underline{T}(z)$$

mit beliebigen $\underline{T}(z)$ gesucht, so muß man die Spaltenoperationen bis zur Blockmatrix, Gl. (3.3.2.3), fortführen. Die Matrizen $\underline{A}_r(z)$ und $\underline{B}_r(z)$ werden z.B. benötigt, um mit einer Polynommatrizendivision eine Lösung minimalen Grades zu berechnen.

Mit elementaren Ähnlichkeitstransformationen wurden für Zustandsraumbeschreibungen effiziente numerische Verfahren formuliert. Hierzu gehören zum Beispiel Dekompositionsalgorithmen zur Überprüfung von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Systeme [V3, A5, A6, H1, P2], aber auch Verfahren zur Transformation auf kanonische Darstellungsformen, wie Regelungsnormalform oder Beobachtbarkeitsnormalform [A5, P3, H1]. Der grundlegende Unterschied zwischen elementaren Ähnlichkeitstransformationen und Polynomäquivalenztransformationen ist, daß erstere numerisch stabilisiert werden können, indem durch Zeilen- oder Spaltenpivotisierung der numerische Fehler gedämpft wird [W3], letztere aber eine solche numerisch motivierte Pivotisierung nicht zulassen. Bei den in Gl. (3.3.2.1-3) durchzuführenden Transformationen, die einer Gauß-Elimination entsprechen, ist nicht nach dem Betrag der Polynomkoeffizienten zu pivotisieren sondern nach den Polynomgraden der Einzelelemente.

Das Problem der Bestimmung eines Primmatrixproduktes aus der Zustandsraumdarstellung konnte in Abschnitt 3.1 numerisch effizient gelöst werden und entspricht dem Teilproblem der dualen primen Faktorisierung. Hierfür wird die unilaterale diophantische Gleichung mit $\underline{R}(z)=\underline{0}$ angesetzt. Im nächsten

Abschnitt wird der Ansatz zur Berechnung kanonischer Darstellungen von Systemen $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}\}$, die auf einer Polynombasis des Zustandsraumes beruhen, erweitert. Hierbei kann auch ein $\underline{R}(z) \neq 0$ berücksichtigt werden, so daß die unilaterale diophantische Gleichung mittels einer Realisierung im Zustandsraum gelöst werden kann.

3.3.3 Lösung über die Realisierung im Zustandsraum

Das von Solak in [S4] vorgeschlagene Verfahren zur Lösung der unilateralen Gleichung vermeidet elementare Äquivalenztransformationen mit Polynommatrizen und geht stattdessen einen völlig anderen Weg. Ausgehend von einer Zustandsraumrealisierung der Systeme $\{\underline{A}(z), \underline{B}(z)\}$ und $\{\underline{A}(z), \underline{R}(z)\}$ wird eine explizite Gleichung für die Lösung der unilateralen Polynommatrixgleichung angegeben. Hervorzuheben ist, daß die so erhaltene Lösung minimal in Bezug auf die Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ ist, wenn die Systeme in minimaler Zustandsraumdarstellung vorliegen. Die Methode nach [S4] ist jedoch nicht nach numerischen Gesichtspunkten formuliert worden. Hier wird nach einer kurzen Darstellung der Grundlagen eine numerische Version für dieses Verfahren angegeben.

3.3.3.1 Das Lösungsverfahren von Solak

Gesucht wird eine Lösung der Gleichung

$$\underline{A}(z) \underline{P}(z) + \underline{B}(z) \underline{Q}(z) = \underline{R}(z). \quad (3.3.3.1.1)$$

mit

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}[z], \underline{B} \in \mathbb{R}^{m \times 1}[z], \underline{R} \in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \underline{P} \in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \underline{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times r}[z].$$

Im Gegensatz zur allgemeinen Form, Gl. (3.3.1), wird hier vorausgesetzt, daß $\underline{A}(z)$ quadratisch und nichtsingulär ist. Unter diesen Bedingungen kann man mit der in Anhang A1 angegebenen Methode stets eine beobachtbare Zustandsraumdarstellung finden, so daß gilt

$$\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z) = \tilde{\underline{C}} (z \underline{I} - \tilde{\underline{A}})^{-1} \tilde{\underline{B}}_D + \underline{D}_D(z) \quad (3.3.3.1.2.a)$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{R}}(z) = \underline{\underline{C}} (z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}_r + \underline{\underline{D}}_r(z) \quad (3.3.3.1.2.b)$$

mit

$$\underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \underline{\underline{B}}_D \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times 1}, \underline{\underline{B}}_r \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times r}, \underline{\underline{D}}_D \in \mathbb{R}^{m \times 1}[z], \underline{\underline{D}}_r \in \mathbb{R}^{m \times r}[z].$$

Es ist nun möglich, daß $\underline{\underline{A}}(z)$ und $\underline{\underline{B}}(z)$ einen nicht unimodularen größten gemeinsamen linken Teiler $\underline{\underline{L}}(z)$ enthalten. In diesem Fall besitzt die Zustandsraumrealisierung $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}_D)$ ein nicht steuerbares Teilsystem mit einer Ordnung entsprechend dem Determinantengrad des Teilers $\underline{\underline{L}}(z)$. Auf den Zustandsraum übertragen bedeutet die Lösbarkeitsbedingung, daß dieses nicht steuerbare Teilsystem auch in $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}_r)$ enthalten sein muß. Mit den im Abschnitt 3.3.3.2 vorgestellten Methoden ist es möglich, den nicht steuerbaren Anteil, der dem ggT $\underline{\underline{L}}(z)$ entspricht, aus den beiden Zustandsraumdarstellungen zu eliminieren. Auf diese Weise erhält man für $\underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{B}}(z)$ eine beobachtbare und steuerbare, d.h. minimale Zustandsraumrealisierung $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}_D, \underline{\underline{D}}_D(z))$, für die gilt

$$\underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{B}}(z) = \underline{\underline{C}} (z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}_D + \underline{\underline{D}}_D(z) \quad (3.3.3.1.3.a)$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{R}}(z) = \underline{\underline{C}} (z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}_r + \underline{\underline{D}}_r(z) \quad (3.3.3.1.3.b)$$

mit

$$\underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \underline{\underline{B}}_D \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \underline{\underline{B}}_r \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

Bevor die Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung angegeben werden kann, werden noch einige Definitionen benötigt. Mit Kenntnis der Steuerbarkeitsindizes n_{s_i} des Systems $(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}_D, \underline{\underline{C}})$ kann man die Transformationsmatrix

$$\underline{\underline{T}}_S = [\underline{\underline{b}}_{b1}, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}}_{b1}, \dots, \underline{\underline{A}}^{n_{s1}-1} \underline{\underline{b}}_{b1}, \dots, \underline{\underline{b}}_{b1}, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}}_{b1}, \dots, \underline{\underline{A}}^{n_{s1}-1} \underline{\underline{b}}_{b1}] \quad (3.3.3.1.4)$$

aus der System- und Steuermatrix nach Gl. (3.3.3.1.3a) bilden. In [K7, A1] wird gezeigt, daß $\underline{\underline{T}}_S$ diejenige Matrix ist, die das Zustandsraumsystem auf Steuerbarkeitsnormalform transformiert. Die *Steuerbarkeitsform* darf nicht mit der *Steuerungsform* verwechselt werden, die z.B. in Anhang A1 für die Realisierung von Polynommatrixquotienten in Zustandsraumdarstellung benutzt wird. $\underline{\underline{T}}_S$ ist auf jeden Fall nicht-singulär, da $(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}_D, \underline{\underline{C}})$ minimal ist. Weiterhin werden die Monommatrizen

$$\underline{\underline{S}}(z) = \text{block-diag} \left([1 \ z \ \dots \ z^{n_{si}}], i = 1, \dots, l \right) \quad (3.3.3.1.5)$$

und

$$\underline{\underline{H}}(z) = \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ z & 1 & & 0 \\ & n_{si}^{-2} & n_{si}^{-3} & \\ & z & & 1 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, l \right) \quad (3.3.3.1.6)$$

definiert. Die Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung nach dem Verfahren von Solak beruht auf der Parametrierung des Zustandsraumes, die eine Folgerung des sogenannten Strukturtheorems [W7,W9] ist. Durch Einsetzen von Gl. (3.3.3.1.2-6) kann man zeigen, daß

$$(z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{T}}_S \underline{\underline{H}}^T(z) + \underline{\underline{T}}_S = \underline{\underline{B}}_b \underline{\underline{S}}(z) \quad (3.3.3.1.7)$$

gilt. Gl. (3.3.3.1.7) bildet die Grundlage für die Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung über die Realisierung im Zustandsraum. In Anhang A 2 wird ein erläuterndes Beispiel für die Gültigkeit bzw. Herleitung von Gl. (3.3.3.1.7) angegeben. Mit den Vereinbarungen nach Gl. (3.3.3.1.4-7) ist eine Lösung für die unilaterale diophantische Gleichung (3.3.3.1.1) durch

$$\underline{\underline{P}}(z) = \underline{\underline{D}}_r(z) - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{T}}_S \underline{\underline{H}}^T(z) \underline{\underline{T}}_S^{-1} \underline{\underline{B}}_r - \underline{\underline{D}}_b(z) \underline{\underline{Q}}(z) \quad (3.3.3.1.8.a)$$

$$\underline{\underline{Q}}(z) = \underline{\underline{S}}(z) \underline{\underline{T}}_S^{-1} \underline{\underline{B}}_r \quad (3.3.3.1.8.b)$$

gegeben. Um dies zu zeigen, wird zunächst Gl. (3.3.3.3.1) von links mit $\underline{\underline{A}}^{-1}(z)$ multipliziert, dies ergibt

$$\underline{\underline{P}}(z) + \underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{B}}(z) \underline{\underline{Q}}(z) = \underline{\underline{A}}^{-1}(z) \underline{\underline{R}}(z).$$

Wird in diese Gleichung $\underline{\underline{P}}(z)$ nach Gl. (3.3.3.1.8) und $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{R}}$ bzw. $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}$ aus Gl. (3.3.3.1.3) eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} & [\underline{\underline{D}}_r(z) - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{T}}_S \underline{\underline{H}}^T(z) \underline{\underline{T}}_S^{-1} \underline{\underline{B}}_r - \underline{\underline{D}}_b(z) (\underline{\underline{S}}(z) \underline{\underline{T}}_S^{-1} \underline{\underline{B}}_r)] + \\ & + [\underline{\underline{C}} (z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}_b + \underline{\underline{D}}_b(z)] \underline{\underline{S}}(z) \underline{\underline{T}}_S^{-1} \underline{\underline{B}}_r = \underline{\underline{C}} (z \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}_r + \underline{\underline{D}}_r(z). \end{aligned}$$

Nach weiterer Vereinfachung ergibt sich

$$- \underline{C} \underline{T}_S \underline{H}^T(z) \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_r + \underline{C} (\underline{zI} - \underline{A})^{-1} \underline{B}_b \underline{S}(z) \underline{T}_S^{-1}(z) \underline{B}_r = \underline{C} (\underline{zI} - \underline{A})^{-1} \underline{B}_r$$

$$\underline{C} [-\underline{T}_S \underline{H}^T(z) \underline{T}_S^{-1} + (\underline{zI} - \underline{A})^{-1} \underline{B}_b \underline{S}(z) \underline{T}_S^{-1} - (\underline{zI} - \underline{A})^{-1}] \underline{B}_r = 0 ,$$

woraus man durch Ausklammern das Produkt

$$\underline{C} (\underline{zI} - \underline{A})^{-1} [-(\underline{zI} - \underline{A}) \underline{T}_S \underline{H}^T(z) + \underline{B}_b \underline{S}(z) - \underline{T}_S] \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_r = 0$$

erhält. Die linke Seite ergibt nur dann die Nullmatrix, wenn der geklammerte Summand identisch verschwindet, womit gezeigt ist, daß Gl. (3.3.3.1.7) gültig ist. Aufgrund der Struktur von $\underline{S}(z)$ sind die Zeilengrade von $\underline{Q}(z)$ um eins niedriger als die zugehörigen Steuerbarkeitsindizes, es gilt also

$$\text{grad}_{z_i} \underline{Q}(z) < n_{si}.$$

Damit ist Gl. (3.3.3.1.8) eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$, vorausgesetzt $(\underline{C}, \underline{A}, \underline{B}_b, \underline{D}_b(z))$ ist eine minimale Realisierung des Polynommatrixquotienten $\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z)$.

Eine zentrale Rolle bei der Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung über den Zustandsraum spielt die Transformationsmatrix $\underline{T}_S$. In [S4] wird vorgeschlagen, diese Matrix explizit zu berechnen. Eine explizite Berechnung von $\underline{T}_S$ kann man jedoch umgehen, da lediglich die beiden Matrixprodukte $\underline{C}_S = \underline{C} \underline{T}_S$ und $\underline{B}_{rS} = \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_r$ benötigt werden. Diese beiden Matrizen kann man z.B. finden, indem man das Hypersystem $\underline{A}^{-1} [\underline{B} \ \underline{R}]$ folgenden Operationen unterzieht:

$$\underline{A}^{-1}(z) [\underline{B}(z) \ \underline{R}(z)] = \underline{C} (\underline{zI} - \underline{A})^{-1} [\underline{B}_b \ \underline{B}_r] + [\underline{D}_b(z) \ \underline{D}_r(z)]$$

$$= \underline{C} \underline{T}_S (\underline{zI} - \underline{T}_S \underline{A} \underline{T}_S^{-1})^{-1} [\underline{T}_S^{-1} \underline{B}_b \ \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_r] + [\underline{D}_b(z) \ \underline{D}_r(z)]$$

$$= \underline{C}_S (\underline{zI} - \underline{A}_S)^{-1} [\underline{B}_{bS} \ \underline{B}_{rS}] + [\underline{D}_b(z) \ \underline{D}_r(z)] .$$

Definiert man nun

$$\underline{C}_S = \underline{C} \underline{T}_S, \quad \underline{A}_S = \underline{T}_S^{-1} \underline{A} \underline{T}_S, \quad \underline{B}_{bS} = \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_b, \quad \underline{B}_{rS} = \underline{T}_S^{-1} \underline{B}_r$$

dann bilden $\underline{C}_S$, $\underline{A}_S$ und $\underline{B}_{bS}$ aufgrund der Struktur der Transformationsmatrix $\underline{T}_S$ ein System in Steuerbarkeitsnormalform mit beidseitiger Kopplung [K7]. Es genügt also, das System $(\underline{C}, \underline{A}, \underline{B}_b)$ auf geeignete Weise auf Steuerbarkeitsnormalform $(\underline{C}_S, \underline{A}_S, \underline{B}_{bS})$ zu transformieren und die dazu nötigen Zeilenopera-

tionen auch für $\underline{B}_r$ durchzuführen. Die Multiplikation mit $\underline{T}_S$ bzw. $\underline{T}_S^{-1}$ erfolgt dabei nur implizit.

Mit dieser Modifikation der Gl. (3.3.3.1.8a,b) lautet die Lösung von Gl. (3.3.3.1.1)

$$\underline{P}(z) = \underline{D}_r(z) - \underline{C}_S \underline{H}^T(z) \underline{B}_{rS} - \underline{D}_b(z) \underline{Q}(z) \quad (3.3.3.1.9.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{S}(z) \underline{B}_{rS}. \quad (3.3.3.1.9.b)$$

Wie diese Transformation in geeigneter Weise, die auch für eine Implementierung auf dem Digitalrechner günstig ist, konstruiert werden kann, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

3.3.3.2 Die numerische Auswertung des Zustandsraumverfahrens

Zusätzlich zu der oben angegebenen Bedingung, daß $\underline{A}(z)$ quadratisch und nicht-singulär ist, wird im folgenden angenommen, daß die Systeme $\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z)$ und $\underline{A}^{-1}(z) \underline{R}(z)$ proper sind, da in der Zustandsraumbeschreibung nur Systeme mit konstanter Durchgangsmatrix $\underline{D}$ bearbeitet werden können. Bei vielen regelungstechnischen Problemen stellen diese Anforderungen keine Einschränkungen dar. Weiterhin wurde in Abschnitt 3.1 gezeigt, wie man auch allgemeinere Gleichungssysteme auf das hier behandelte Grundproblem zurückführen kann.

Die Berechnung einer Lösung mittels Realisierung im Zustandsraum erfolgt in vier Schritten:

- 1) Erzeugen einer von der Ausgangsmatrix $\tilde{\underline{C}}$ beobachtbaren Zustandsraumrealisierung $\{\tilde{\underline{A}}, \tilde{\underline{B}}_p, \tilde{\underline{B}}_r, \tilde{\underline{C}}, \tilde{\underline{D}}_b, \tilde{\underline{D}}_r\}$ zu $\underline{A}^{-1}(z) [\underline{B}(z) \underline{R}(z)]$.
- 2) Berechnen der Minimalrealisierung $\{\underline{C}, \underline{A}, \underline{B}_b, \underline{B}_r, \underline{D}_b, \underline{D}_r\}$ und überprüfen der Lösbarkeit.
- 3) Transformieren des Subsystems $\{\underline{C}, \underline{A}, \underline{B}_b\}$ auf Steuerbarkeitsnormalform und Akkumulation der Transformation für $\underline{B}_{bS}$ zu $\{\underline{A}_S, \underline{B}_{bS}, \underline{B}_{rS}, \underline{C}_S, \underline{D}_b, \underline{D}_r\}$.
- 4) Auswerten von Gl. (3.3.3.1.9).

Die Zustandsraumrealisierung der Polynommatrixquotienten kann mit der in Anhang A1 angegebenen Methode durchgeführt werden. Schritt 1) ist dabei numerisch relativ unkritisch, da zur Berechnung der Zustandsraumparameter nur eine einzige Matrixinversion der (mxm)-dimensionalen führenden Zeilenkoeffizientenmatrix nötig ist, die in der Regel wegen der oberen Dreiecksform dieser Matrix bei kanonischen Darstellungen sogar entfällt.

Die so erhaltenen Systemmatrizen werden im zweiten Schritt in einer erweiterten Rosenbrock-Matrix

$$\tilde{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \tilde{n} & 1 & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_b & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C} & \underline{D}_b & \underline{D}_r \end{array} \right] \begin{array}{l} n_b \\ \\ m \end{array} \end{array}$$

angeordnet. Die weitere Aufgabe besteht darin, ein eventuell vorhandenes nicht steuerbares Teilsystem dieses Zustandsraumsystems zu erkennen und abzuspalten. Dazu wird das System z.B. mittels elementaren Ähnlichkeitstransformationen auf verallgemeinerte gestaffelte Hessenberg-Form transformiert [A5, H1, P3, V3]. Dabei werden für $\underline{B}_r$ die gleichen Zeilentransformationen wie für $\underline{B}_b$ ausgeführt. Die verallgemeinerte untere Hessenberg-Form hat z.B. für ein System mit 2 Eingängen, 2 Ausgängen und einer beobachtbaren Ordnung von $n_b = 7$ die Struktur

$$H = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{A}_{ns} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{B}_{rns} \\ \hline \underline{A}_{21} & \underline{A} & \underline{B} & \underline{B} \\ \hline \underline{C}_{ns} & \underline{C} & \underline{D}_b & \underline{D}_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccc|cc|cc} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \otimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \otimes & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \otimes & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \otimes & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \otimes & 0 & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right]$$

Für dieses Strukturbeispiel findet man die Steuerbarkeitsindizes $n_{s1} = 3$ und $n_{s2} = 2$, woraus sich die Ordnung der Minimalrealisierung zu $n = 5$ ergibt. $\underline{A}_{ns}$ ist die Systemmatrix des nicht steuerbaren Teilsystems von $(\tilde{A}, \tilde{B}_b, \tilde{C})$.

Die Lösbarkeitsbedingung für die unilaterale diophantische Gleichung besagt, daß ein eventuell vorhandenes nicht steuerbares Teilsystem, also ein gemeinsamer linker Faktor, von $\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z)$ auch in $\underline{A}^{-1}(z) \underline{R}(z)$ enthalten sein muß. Das bedeutet, daß $\underline{A}_{ns}$ auch von $\underline{B}_r$ aus nicht steuerbar sein darf. Betrachtet man die erste Zeile der Blockmatrix $\underline{H}$, so liegt folgende Behauptung nahe: Das Gleichungssystem (3.3.3.1.1) ist genau dann lösbar, wenn $\underline{B}_{rns}$ identisch Null ist.

Die Gültigkeit dieser Aussage kann über die Steuerbarkeitsmatrix der verallgemeinerten Hessenberg-Form der beobachtbaren Realisierung des Systems $\underline{A}^{-1}(z) \underline{R}(z)$ verifiziert werden. Die Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix ist durch

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{B}_r & \underline{A} \underline{B}_r & \underline{A}^2 \underline{B}_r & \dots & \underline{A}^{n-1} \underline{B}_r \end{bmatrix}$$

gegeben. Durch die spezielle Struktur der Systemmatrix ergibt sich für ihre Potenzen

$$\underline{A}^k = \begin{bmatrix} \underline{A}_{ns}^k & \underline{0} \\ \underline{A}_{21,k} & \underline{A}^k \end{bmatrix}.$$

Die Nullmatrix der Dimension $n_s \times (n - n_s)$ bleibt also erhalten. Damit kann die Steuerbarkeitsmatrix auch als

$$\underline{S} = \left[\begin{bmatrix} \underline{B}_{rns} \\ \underline{B}_r \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \underline{A}_{ns} & \underline{0} \\ \underline{A}_{21,1} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{rns} \\ \underline{B}_r \end{bmatrix} \middle| \dots \middle| \begin{bmatrix} \underline{A}_{ns}^{n-1} & \underline{0} \\ \underline{A}_{21,n-1} & \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{rns} \\ \underline{B}_r \end{bmatrix} \right]$$

dargestellt werden. Betrachtet man beide Blockzeilen, dann gilt sicherlich

$$\begin{aligned} \text{Rang } \underline{S} &< \text{Rang } [\underline{B}_{rns} \mid \underline{A}_{ns} \underline{B}_{rns} \mid \dots \mid \underline{A}_{ns}^{n-1} \underline{B}_{rns}] \\ &+ \text{Rang } [\underline{B}_r \mid \underline{A}_{21,1} \underline{B}_{rns} + \underline{A} \underline{B}_r \mid \dots \mid \underline{A}_{21,n-1} \underline{B}_{rns} + \underline{A}^{n-1} \underline{B}_r]. \end{aligned}$$

Damit $\underline{A}_{ns}$ von $\underline{B}_{rns}$ aus nicht steuerbar ist, muß gelten

$$\text{Rang } [\underline{B}_{rns}, \underline{A}_{ns} \underline{B}_{rns}, \dots, \underline{A}_{ns}^{n-1} \underline{B}_{rns}] = 0.$$

Eine Matrix besitzt genau dann den Rang Null, wenn alle Elemente Null sind, woraus folgt, daß $\underline{B}_{rns}$ identisch Null sein muß.

Durch diese Überlegungen ergibt sich eine sehr einfache Möglichkeit zur Überprüfung der Lösbarkeit des Gleichungssystems. Man berechnet die Norm der zum nichtsteuerbaren Anteil des Systems gehörenden Untermatrix $\underline{B}_{rns}$ und prüft, ob sie kleiner ist als eine vorgegebene Fehlerschranke.

Im folgenden wird der nicht steuerbare Anteil $\underline{A}_{ns}$ aus der Zustandsraumdarstellung eliminiert und man erhält als Minimalrealisierung in verallgemeinerter gestaffelter Hessenberg-Form

$$\underline{H}_H = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{A} & \underline{B}_p & \underline{B}_r \\ \hline \underline{C} & \underline{D}_p & \underline{D}_r \end{array} \right] .$$

In Schritt 3 wird dieses System zunächst auf eine permutierte Steuerbarkeitsnormalform transformiert, indem die Elemente unterhalb der rechten oberen Außendiagonalen eliminiert werden. Diese Transformation ist der numerisch problematischste Schritt dieses Verfahrens, weil bei den notwendigen Elementartransformationen keine Pivotsuche mehr möglich ist. Für das oben angegebene Beispiel hat die permutierte Steuerbarkeitsform die Struktur

$$\tilde{\underline{H}}_S = \left[\begin{array}{ccccc|cc|cc} \times & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times & 1 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & 1 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 & 1 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] .$$

Durch reines Umsortieren, d.h. Zeilen- und Spaltenvertauschungen durch elementare Ähnlichkeitstransformationen, erhält man aus der permutierten Steuerbarkeitsform die minimale Zustandsraumrealisierung von $\underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z)$ in Steuerbarkeitsnormalform

$$H_S = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{A}_S & \underline{B}_{bS} & \underline{B}_{rS} \\ \hline \underline{C}_S & \underline{D}_b & \underline{D}_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|cc|cc} 0 & 0 & \times & 0 & \times & 1 & 0 & \times & \times \\ 1 & 0 & \times & 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 1 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] .$$

Mit den so berechneten Matrizen $\underline{C}_S$, $\underline{B}_{rS}$, $\underline{D}_b$ und $\underline{D}_r$ und den Steuerbarkeitsindizes n_{si} ist es einfach Gl. (3.3.3.1.9) in Schritt 4 des Algorithmus auszurechnen. Dazu sind im wesentlichen Umsortierungen und Matrizenmultiplikationen nötig.

Das in diesem Abschnitt angegebene Verfahren kann mit Standardmethoden zur Ermittlung kanonischer Formen durchgeführt werden. Die numerischen Eigenschaften der hierbei benutzten Algorithmen zur elementaren und orthogonalen Ähnlichkeitstransformation sind ausführlich untersucht worden [P2]. Der erste Schritt zur Berechnung der gestaffelten Hessenbergform ist kritisch, denn hier wird die Struktur der kanonischen Form festgelegt. Diese Transformation ist durch Pivotisierung oder Householder-Transformation [W4] numerisch stabilisierbar. Die Bestimmung der Parameter durch die Transformation auf Steuerbarkeitsnormalform unterliegt zwar einer nicht stabilisierbaren Operation, erweist sich praktisch jedoch als unkritisch. Das größte Problem in der Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens ist die durch die Zustandsraumdarstellung gegebene Beschränkung auf propere Systeme, andernfalls ist eine Polynommatrixdivision zur Bestimmung der Polynommatrizen $\underline{D}_b(z)$ bzw. $\underline{D}_r(z)$ notwendig, um die Auswertung im Zustandsraum vorzunehmen. Ein Verfahren, das diesen Nachteil nicht aufweist, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

3.3.4 Lösung über eine minimale Basis des Nullraumes der Systempolynommatrizen

Im folgenden wird ein sehr leistungsfähiges Verfahren vorgestellt, mit dem es nicht nur möglich ist, eine Lösung minimalen Grades für die unilaterale diophantische Gleichung

$$\underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = [\underline{P}(z), \underline{Q}(z)] \begin{bmatrix} \underline{A}(z) \\ \underline{B}(z) \end{bmatrix} = \underline{R}(z) \quad (3.3.4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{A} &\in \mathbb{R}^{r \times r}[z], & \underline{B} &\in \mathbb{R}^{1 \times r}[z], & \underline{R} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \\ \underline{P} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], & \underline{Q} &\in \mathbb{R}^{m \times 1}[z], \end{aligned}$$

zu finden, sondern auch für die duale prime Faktorisierung

$$-\underline{B}_1(z) \underline{A}(z) + \underline{A}_1(z) \underline{B}(z) = [-\underline{B}_1(z), \underline{A}_1(z)] \begin{bmatrix} \underline{A}(z) \\ \underline{B}(z) \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (3.3.4.2)$$

mit

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}[z], \underline{B} \in \mathbb{R}^{1 \times r}[z], \underline{A}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[z], \underline{B}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times r}[z].$$

Diese beiden Probleme können auf die Suche nach einer minimalen Basis des linken Nullraums der Polynommatrix

$$\underline{F}(z) = \begin{bmatrix} \underline{A}(z) \\ \underline{B}(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+r) \times r}[z] \quad (3.3.4.3)$$

zurückgeführt werden. Unter dem linken Nullraum von $\underline{F}(z)$ versteht man eine Polynommatrix $\underline{E}(z) \neq \underline{0}$, so daß gilt

$$\underline{E}(z) \underline{F}(z) = \underline{0}, \quad \underline{E} \in \mathbb{R}^{1 \times (1+r)}[z]. \quad (3.3.4.4)$$

Die in dieser Arbeit benutzte Methode wurde zuerst in [K15] für die duale prime Faktorisierung vorgeschlagen, dabei wurde ein rekursiver Algorithmus auf der Basis der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung formuliert. Weiter ausgebaut wurde dieses Verfahren in [C2] für die Lösung von Syntheseproblemen mittels Polynommatrixbeschreibungen. Hierbei wurde jedoch eine verallgemeinerte Form der Polynommatrixquotienten nach [P4, C3] zugrunde gelegt, so daß insbesondere die Strukturauswahl für die Lösung nicht übernommen werden kann. Weiterhin ist das in [C2] eingesetzte Verfahren zur Lösung überbe-

stimmter Gleichungssysteme sehr aufwendig und wird hier durch ein sequentielles Verfahren ersetzt.

3.3.4.1 Konstruktion einer Basis des Nullraums

Es liegt nahe, Gl. (3.3.4.4) durch Koeffizientenvergleich in ein lineares Gleichungssystem umzuwandeln. Dazu müssen $\underline{\underline{E}}(z)$ und $\underline{\underline{F}}(z)$ zunächst als Matrixpolynome

$$\underline{\underline{E}}(z) = \underline{\underline{E}}_0 + \underline{\underline{E}}_1 z + \underline{\underline{E}}_2 z^2 + \dots + \underline{\underline{E}}_k z^k \quad (3.3.4.1.1)$$

$$\underline{\underline{F}}(z) = \underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{F}}_1 z + \underline{\underline{F}}_2 z^2 + \dots + \underline{\underline{F}}_n z^n \quad (3.3.4.1.2)$$

dargestellt werden. Im Gegensatz zur Ordnung n , die bekannt ist, muß k erst im Verlauf der Rechnung bestimmt werden. Der Koeffizientenvergleich liefert ein Gleichungssystem

$$[\underline{\underline{E}}_0 \ \underline{\underline{E}}_1 \ \underline{\underline{E}}_2 \ \dots \ \underline{\underline{E}}_k] \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_0 & \underline{\underline{F}}_1 & \underline{\underline{F}}_2 & \dots & \underline{\underline{F}}_n \\ \underline{\underline{F}}_0 & \underline{\underline{F}}_1 & \underline{\underline{F}}_2 & \dots & \underline{\underline{F}}_n \\ & \underline{\underline{F}}_0 & \underline{\underline{F}}_1 & \underline{\underline{F}}_2 & \dots & \underline{\underline{F}}_n \\ & & \underline{\underline{F}}_0 & \underline{\underline{F}}_1 & \underline{\underline{F}}_2 & \dots & \underline{\underline{F}}_n \end{bmatrix} = [\underline{0} \ \dots \ \underline{0}] \quad (3.3.4.1.3)$$

in Block-Töplitz-Struktur. Gl. (3.3.4.1.3) kann abgekürzt als

$$\underline{\underline{E}} \underline{\underline{F}} = \underline{0}.$$

geschrieben werden. Durch Multiplikation einer Zeile von $\underline{\underline{E}}$ mit der Matrix $\underline{\underline{F}}$ erhält man eine Linearkombination der Zeilen von $\underline{\underline{F}}$, die den Nullvektor ergibt. Die Matrix $\underline{\underline{E}}$ beschreibt die linearen Abhängigkeiten der Zeilen von $\underline{\underline{F}}$. Also kann man $\underline{\underline{E}}(z)$ bei gegebenen $\underline{\underline{F}}(z)$ aus den Beziehungen der linearen Abhängigkeiten der Zeilen von $\underline{\underline{F}}$ konstruieren.

Damit $\underline{\underline{E}}(z) = [-\underline{\underline{B}}_1(z) \ \underline{\underline{A}}_1(z)]$ eine sinnvolle Lösung der dualen primen Faktorisierung ist, muß $\underline{\underline{E}}(z)$ folgende Bedingungen [K15] erfüllen:

- $\underline{\underline{E}}(z)$ bildet eine minimale Basis für den linken Nullraum von $\underline{\underline{F}}(z)$,
- $\underline{\underline{E}}(z)$ ist zeilen- und spaltenreduziert, d.h. $\underline{\underline{E}}(z)$ hat vollen Rang für alle z ,

- $\underline{A}_1(z)$ ist zeilenreduziert, d.h. die führende Zeilenkoeffizientenmatrix hat vollen Rang.

Mit dem im folgenden beschriebenen Auswahlverfahren für linear unabhängige Zeilen aus der Matrix $\underline{F}$ wird sichergestellt, daß $\underline{E}(z)$ diese Anforderungen erfüllt. Man kann zeigen, daß dieses Auswahlverfahren als Ergebnis eine Polynommatrix $\underline{E}(z)$ in Zeilen-Stufenform (Popov-Form, "polynomial echelon form") liefert [K7, B2]. Diese kanonische Form einer $(m \times l)$ -Polynommatrix $\underline{P}(z)$ ist folgendermaßen definiert:

- 1) $\underline{P}(z)$ ist zeilenreduziert und die Zeilengrade sind in aufsteigender Reihenfolge angeordnet, so daß gilt

$$n_{z1} \leq n_{z2} \leq \dots \leq n_{zm}.$$

- 2) Für jede Zeile j existiert ein Pivotindex k_j , so daß gilt

- a) $p_{j,k_j}(z)$ ist normiert und besitzt den Zeilengrad n_{zj} ,

- b) $\text{grad } p_{j,i}(z) < n_{zj}$ für $i > k_j$, d.h. alle Elemente der gleichen Zeile rechts von der Spalte mit dem Zeilenpivotelement besitzen einen streng kleineren Grad als das Pivotelement,

- c) $\text{grad } p_{i,k_j}(z) < \text{grad } p_{j,k_j}$ für $i \neq j$, d.h. das Polynom $p_{i,k_j}(z)$ besitzt den höchsten Grad in der Spalte j ,

- d) wenn $n_{zi} = n_{zj}$ und $i > j$, dann gilt $k_i > k_j$, d.h. Pivotelemente für Zeilen gleichen Zeilengrades sind in unterschiedlichen Spalten.

Hier wurde die Definition nach [K15] wiedergegeben, die sich von [B2] nur durch die in 1) gestellte Bedingung unterscheidet. Fordert man nicht die nach der Größe geordnete Abfolge der k_j und ordnet sie stattdessen auf der Hauptdiagonalen an, dann erhält man für die höchste Zeilenkoeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$ eine Dreiecksform. Bei der Arbeit mit der zur Polynommatrix assoziierten Block-Toplitz-Matrix ist jedoch die Definition nach [K15] günstiger, weiterhin kann man ohne weiteres die Bedingung 2c) fallen lassen, wenn man nicht an der Eindeutigkeit der Popov-Form interessiert ist, was hier der Fall ist.

Im folgenden wird mit $\underline{f}_k^T$ die k -te Zeile der Matrix $\underline{F}$ bezeichnet und durch schrittweises Überprüfen der linearen Abhängigkeit der Zeilen von $\underline{F}$ wird die Basis des Nullraums aufgebaut. Hierbei ist die Auswahl der redundanten Zeilen wichtig, da diese die Struktur der Lösungspolynommatrix bestimmt.

Beginnend mit $k=1$ wird geprüft, ob $\underline{f}_{k+1}^T$ eine Linearkombination der vorhergehenden linear unabhängigen Zeilen ist. Angenommen $\underline{f}_{k+1}^T$ ist die erste linear abhängige Zeile, dann liegt diese Zeile in dem von ihren Vorgängern aufgespannten Raum und es gilt

$$e_{11} \underline{f}_1^T + e_{12} \underline{f}_2^T + \dots + e_{1,k1} \underline{f}_{k1}^T + \underline{f}_{k1+1}^T = \underline{0}.$$

Nun kann man die erste Zeile von $\underline{E}$ gemäß

$$\underline{e}_1^T = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1,k1}, 1, 0, \dots, 0]$$

konstruieren, wobei $\underline{e}_{k1+1}$ für die Lösung des homogenen Gleichungssystems zu eins gewählt wurde, um, wie man später sehen wird, die Bedingung 2b) zu erfüllen. Bevor die Konstruktion der Basis fortgesetzt werden kann, muß aus der Menge der bisher untersuchten Zeilen $\{\underline{f}_1^T, \dots, \underline{f}_{k1+1}^T\}$ eine linear abhängige Zeile gestrichen werden. Prinzipiell kann eine beliebige Zeile eliminiert werden, aber um die oben angeführten Forderungen an $\underline{E}(z)$ zu erfüllen, wird dazu, im Gegensatz zu [C3], die letzte Zeile $\underline{f}_{k1+1}^T$ ausgewählt und man bezeichnet sie als 'primär abhängige Zeile' [K15].

Aus der Block-Toplitz-Struktur der Matrix $\underline{F}$, Gl. (3.3.4.1.3), kann man sofort schließen, daß alle weiteren Zeilen $\underline{f}_j^T$, die aus $\underline{f}_{k1+1}^T$ durch Verschiebung nach rechts entstanden sind, linear abhängig sind. Aus der Matrix $\underline{F}$ werden also alle Zeilen $\underline{f}_j^T$ gestrichen, für die gilt

$$j > k_1 \quad \text{und} \quad j \bmod (1+r) = (k_1+1) \bmod (1+r). \quad (3.3.4.1.4)$$

Zeilen, die diese Bedingung erfüllen, werden als 'redundante Zeilen' bezeichnet.

Nach dem Streichen der redundanten Zeilen wird die Suche nach weiteren linear abhängigen Zeilen fortgesetzt. Für jede primär abhängige erhält man eine Zeile von $\underline{E}$. Insgesamt werden für die duale prime Faktorisierung 1 Zeilen von $\underline{F}$ benötigt, wobei 1 die Zeilenzahl der Polynommatrix $\underline{B}(z)$ ist.

Beispiel 3.3.4.1.1

Für einen gegebenen rechten Polynommatrixquotienten $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$ mit

$$\underline{A}(z) = \begin{bmatrix} -z & 4z+z^2 \\ z & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 4+z \\ -1 & 8+3z \end{bmatrix}$$

erhält man nach Gl. (3.3.4.3) die Hypermatrix

$$\underline{\underline{F}}(z) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}(z) \\ \underline{\underline{B}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 4z+z^2 \\ z & 0 \\ 0 & 4+z \\ -1 & 8+3z \end{bmatrix}.$$

Aus dieser Matrix ist die Block-Toeplitz-Matrix

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{pa}z \\ \\ \\ \leftarrow \text{pa}z \end{matrix}$$

Zeile	Polynom-matrix
f_{1T}	$\underline{\underline{A}}(z)$
f_{2T}	
f_{3T}	$\underline{\underline{B}}(z)$
f_{4T}	
f_{5T}	$z\underline{\underline{A}}(z)$
f_{6T}	
f_{7T}	$z\underline{\underline{B}}(z)$
f_{8T}	
f_{9T}	$z^2\underline{\underline{A}}(z)$
f_{10T}	
f_{11T}	$z^2\underline{\underline{B}}(z)$
f_{12T}	

aufzustellen, für die die lineare Abhängigkeit der einzelnen Zeilen zu prüfen ist. Man findet

$$-f_{1T} - f_{2T} + f_{7T} = 0$$

und wählt f_{7T} als erste primär abhängige Zeile. Die Koeffizienten der Linearkombination liefern den ersten Vektor der Basis

$$e_1^T = [-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Die redundanten Zeilen f_{7T} , f_{11T} , ... werden gestrichen. Die nächste primär abhängige Zeile ist f_{12T} , denn es gilt

$$-8 f_{1T} - 4 f_{2T} - 3 f_{5T} - 2 f_{6T} + 4 f_{8T} + f_{12T} = 0.$$

Damit erhält man als Basis des Nullraum

$$\underline{E} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & 0 \end{array} \parallel \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \end{array} \parallel \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [\underline{E}_0 \ \underline{E}_1 \ \underline{E}_2],$$

woraus man wegen der Partitionierung

$$\underline{E} = \left[\begin{array}{cc|cc} -\underline{B}_{10} & \underline{A}_{10} & -\underline{B}_{11} & \underline{A}_{11} \\ -\underline{Q}_{12} & \underline{A}_{12} \end{array} \right]$$

sofort die Matrizen des rechten Polynommatrixquotienten $\underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}(z)$ zu

$$\underline{B}_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8+3z & 4+2z \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_1(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 4z+z^2 \end{bmatrix}$$

bestimmen kann.

Anhand dieses Beispiels sollen nun einige Anmerkungen zur Struktur der Koeffizientenmatrix $\underline{F}$ gegeben werden:

- Jede Zeile von $\underline{E}$ enthält als letztes Element $\neq 0$ das sogenannte Pivotelement. Der Spaltenindex der Pivotelemente entspricht dem Index der primär abhängigen Zeilen von $\underline{F}$ (hier: $e_{17}, e_{2,12}$).
- Abgesehen von den Pivotelementen können nur in denjenigen Spalten von $\underline{E}$ Elemente verschieden von Null auftreten, die zu den linear unabhängigen Zeilen von $\underline{F}$ gehören (hier: Spalten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10).
- Alle Zeilen von $\underline{E}$ sind linear unabhängig.
- Wenn die gegebenen Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ einen echt rationalen rechten Polynommatrixquotienten bilden, dann gehören alle Pivotelemente zur Polynommatrix $\underline{A}_1(z)$. Andernfalls enthielte $\underline{B}_1(z)$ eine Zeile mit einem höheren Zeilengrad als $\underline{A}_1(z)$, d.h. der Polynommatrizenquotient $\underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}_1(z)$ wäre nicht proper. Für die Aufstellung des Gleichungssystems bedeutet dies, daß nur diejenigen Zei-

len von $\underline{F}$ primär abhängig sein können, die zur Polynommatrix $\underline{B}(z)$ gehören (hier: Zeilen 3, 4, 7, 8, 11, 12)

- Bei einem properen System $\{\underline{A}(z), \underline{B}(z)\}$, sind die Zeilengrade n_{zi} von $\underline{A}_1(z)$ in aufsteigender Folge geordnet (hier: $n_{z1}=1$, $n_{z2}=2$). Diese Zeilengrade - und damit die Beobachtbarkeitsindizes der Minimalrealisierung zu $\underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}_1(z)$ - entsprechen den Verschiebungsfaktoren der primär abhängigen Zeilen von $\underline{F}$. Die Zeilengrade von $\underline{B}_1(z)$ sind kleiner oder gleich den Zeilengraden von $\underline{A}_1(z)$.
- Damit besitzt die aus $\underline{E}$ gebildete Polynommatrix $\underline{E}(z)$ die Zeilen-Stufenform.

Sind die redundanten Zeilen durch Aufbau der Basis des Nullraums bekannt, dann kann das allgemeine Problem

$$[\underline{P}(z) \quad \underline{Q}(z)] \begin{bmatrix} \underline{A}(z) \\ \underline{B}(z) \end{bmatrix} = \underline{E}(z) \underline{F}(z) = \underline{R}(z) \quad (3.3.4.1.5)$$

mit von $\underline{Q}$ verschiedener rechter Seite betrachtet werden. Es wird angenommen, daß eine Lösung für diese Gleichung existiert, d.h. es wird vorausgesetzt, daß $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ rechtsprim sind. Falls dies nicht bekannt ist, kann man durch Konstruktion eines größten gemeinsamen Teilers nach Abschnitt 3.2 oder mit dem in Anhang A3 angegebenen Verfahren die Lösbarkeit überprüfen. Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann wieder

$$[\underline{E}_0 \quad \underline{E}_1 \dots \underline{E}_k] \begin{bmatrix} \underline{F}_0 & \underline{F}_1 & \dots & \underline{F}_n \\ & \underline{F}_0 & \underline{F}_1 & \dots & \underline{F}_n \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{F}_0 & \underline{F}_1 & \dots & \underline{F}_n \end{bmatrix} = [\underline{R}_0 \quad \underline{R}_1 \dots \underline{R}_{n+k+1}] , \quad (3.3.4.1.5)$$

was mittels

$$\underline{E} \underline{F} = \underline{G}$$

abgekürzt wird. Da dieses Gleichungssystem laut Voraussetzung lösbar ist, muß $\underline{G}$ eine Linearkombination der linear unabhängigen Zeilen von $\underline{F}$ sein. Das bedeutet wiederum, daß das Gleichungssystem mit der bei der dualen pri-

men Faktorisierung gefundenen Basis aus primär unabhängigen Zeilen eindeutig nach $\underline{E}$, auflösbar ist.

Beispiel 3.3.4.1.2

Gesucht wird eine Lösung für die Gleichung

$$\underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = \underline{R}(z) ,$$

wobei $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ wie in Beispiel 3.3.4.1.1 gegeben sind, und $\underline{R}(z) = \underline{I}$ gilt. Durch Streichen der redundanten Zeilen $\underline{f}_7^T$, $\underline{f}_{11}^T$ und $\underline{f}_{12}^T$ erhält man das Gleichungssystem

$$\underline{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0 & -4 & -0 & -1 & -0 & -0 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0 & -4 & -0 & -1 & -0 & -0 \\ \hline -1 & -8 & -0 & -3 & -0 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

woraus sich z.B. durch LR-Zerlegung die Lösung

$$\underline{E} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 0.75 & 0.5 & 2.0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1875 & -0.125 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ,$$

ergibt. Unter Berücksichtigung von

$$\underline{E} = [\underline{P}_0 \mid \underline{Q}_0 \mid \underline{P}_1 \mid \underline{Q}_1 \mid \underline{P}_2 \mid \underline{Q}_2]$$

erhält man die Lösungspolynommatrizen

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.1875 & -0.125 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{Q}(z) = \begin{bmatrix} 2.0 & -1-0.25 z \\ 0.25 & 0.0625 z \end{bmatrix} .$$

Zur Struktur des Ergebnisses können verallgemeinernd folgende Aussagen gemacht werden:

- Elemente verschieden von Null können nur in denjenigen Spalten von $\underline{E}$ auftreten, die zu den primär unabhängigen Zeilen von $\underline{F}$ gehören (hier: Spalten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10). Entgegen dem oben angegeben trivialen Beispiel sind in der Regel alle erlaubten Spalten von $\underline{E}$ voll besetzt.
- Falls die Übertragungsmatrix $\underline{B}(z)$ $\underline{A}^{-1}(z)$ proper ist (d.h. alle gestrichenen Spalten von $\underline{E}$ gehören zur Matrix $\underline{Q}(z)$), dann sind die Spaltengrade von $\underline{Q}(z)$ um eins kleiner als die Beobachtbarkeitsindizes der Zustandsraumrealisierung von $\underline{A}^{-1}(z)$ $\underline{B}_1(z)$. Die gefundenen Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ sind also eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ für die unilaterale Gl. (3.3.4.1).

Eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung, wie in Beispiel 3.3.4.1.2 angegeben, ist numerisch nicht sinnvoll. Denn hierfür müßte zunächst die lineare Abhängigkeit der einzelnen Zeilen der Matrix $\underline{F}$ überprüft werden, um die Indizes der redundanten Zeilen zu ermitteln. Erst nach erneutem Aufstellen des Gleichungssystems ohne die redundanten Zeilen könnte die Lösungsmatrix $\underline{E}$ gewonnen werden. Wie man mittels QR-Zerlegung die linear unabhängigen Zeilen durch Orthogonalisierung finden und aus der so faktorisierten Form der Matrix $\underline{F}$ die Lösung direkt bestimmen kann, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

3.3.4.2 Numerische Auswertung der Block-Toplitz-Gleichungen

Der wichtigste Schritt des Nullraum-Verfahrens ist die Suche nach primär abhängigen Zeilen in der Matrix $\underline{F}$. Dieser Schritt entscheidet über die Struktur der Lösung, weil die Verschiebungsfaktoren der primär abhängigen Zeilen den Kroneckerindizes des Systems $\underline{A}_1^{-1}(z)\underline{B}_1(z)$ entsprechen. Weiterhin ist die Entscheidung über lineare Abhängigkeit im numerischen Sinne zu treffen, da die Arithmetik eines Rechners fehlerbehaftet ist.

Zunächst muß für jede Zeile der Matrix $\underline{F}$ geprüft werden, ob sie linear unabhängig von allen vorangehenden primär unabhängigen Zeilen ist. Es sei nun $\underline{f}_k^T$ die k-te Zeile von $\underline{F}$ und $\tilde{\underline{F}} = [\underline{f}_1 \dots \underline{f}_j]$ eine Matrix aus den Vektoren der primär unabhängigen Zeilen, die bis zum Schritt k-1 gefunden wurden; $\underline{f}_1 \neq \underline{0}$ wird vorausgesetzt, da $\underline{A}(z)$ nicht singular ist. Außerdem sei $\underline{x}$ eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate [L2], so daß gilt

$$\tilde{\underline{F}} \underline{x} \approx \underline{f}_k. \quad (3.3.4.2.1)$$

Dann gilt die Zeile $\underline{f}_k^T$ als numerisch linear abhängig, wenn die Fehlernorm

$$e = \| \tilde{\underline{F}} \underline{x} - \underline{f}_k \| \quad (3.3.4.2.2)$$

kleiner ist, als eine vorgegebene Schranke $e_{\max}$.

Wenn die QR-Zerlegung von $\tilde{\underline{F}}$ bekannt ist, braucht $\underline{x}$ nicht explizit berechnet zu werden um e zu bestimmen, denn dann gilt

$$\underline{Q} \tilde{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{bmatrix},$$

mit der orthogonalen Matrix $\underline{Q}$ und der rechten oberen Dreiecksmatrix $\underline{R}$.

Für die Fehlernorm erhält man

$$e = \| \tilde{\underline{F}} \underline{x} - \underline{f}_k \| = \| \underline{Q} \tilde{\underline{F}} \underline{x} - \underline{Q} \underline{f}_k \| = \left\| \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{x} - \begin{bmatrix} \underline{f}' \\ \underline{f}'' \end{bmatrix} \right\| \quad (3.3.4.2.3)$$

und Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate ergibt sich aus

$$\underline{R} \underline{x} = \underline{f}' \quad (3.3.4.2.4)$$

durch Rücksubstitution. Setzt man Gl. (3.3.4.2.4) in Gl. (3.3.4.2.3) ein, so erhält man für die Fehlernorm des Gleichungssystems

$$e = \| \underline{f}'' \|. \quad (3.3.4.2.5)$$

Für die Überprüfung der linearen Abhängigkeit wird also die euklidische Norm des Restvektors $\underline{f}''$ der rechten Seite benutzt. Falls sich die Zeile $\underline{f}_k^T$ als linear unabhängig herausstellt, wird sie als neue Spalte zur Matrix $\underline{F}$, bzw. deren QR-Zerlegung, hinzugefügt. Andernfalls wird $\underline{f}_k^T$ als primär abhängige Zeile gekennzeichnet und alle redundanten Zeilen aus $\underline{F}$ werden gemäß Gl. (3.3.4.1.4) gestrichen.

In [C2] wird das als numerisch stabil bekannte QR-Verfahren benutzt, um das überbestimmte Gleichungssystem, Gl. (3.3.4.2.1), aufzulösen. Für jede gefundene primär unabhängige Zeile wird dort die QR-Zerlegung der Basis $\tilde{\underline{F}}$

völlig neu berechnet, was bei großen Gleichungssystemen sehr rechenzeintensiv ist. Da in jedem Schritt jedoch nur eine Spalte zur Matrix $\tilde{F}$ hinzukommt, liegt es nahe, ein sequentielles Verfahren nach [L2] zur QR-Zerlegung von $\tilde{F}$ zu benutzen. Neben dem sequentiellen QR-Algorithmus wurde in dieser Arbeit auch ein sequentieller Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung konzipiert und untersucht. Diese Verfahren werden in Anhang A3 und A4 erläutert.

Für die duale prime Faktorisierung genügt es, das Gleichungssystem soweit aufzustellen, bis man l primär abhängige Zeilen gefunden hat, l ist hierbei die Zeilenzahl von $\underline{B}(z)$. Die Ordnung der Basis, also der maximale Verschiebungsfaktor, ist dann gleich dem größten Beobachtbarkeitsindex der Minimalrealisierung von $\underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}_1(z)$. In speziellen Fällen, z.B. für eine Polynommatrizendivision, wird jedoch im allgemeinen eine Basis höherer Ordnung benötigt. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt

$$\text{grad } \underline{R}(z) > \text{grad } \underline{A}(z) + \text{grad } \underline{B}(z).$$

Die Vorgehensweise bei der numerischen Auswertung der Block-Topplitz-Gleichung ist wie folgt. Durch die sequentielle QR-Zerlegung wird eine minimale Basis des Nullraums von $\underline{F}$ aufgebaut. Entsprechend der Lösung eines LS-Problems kann das Gleichungssystem für jede beliebige rechte Seite gelöst werden. Danach wird im Falle der dualen primen Faktorisierung das Gleichungssystem mit den einzelnen primär abhängigen Zeilen als rechte Seite gelöst. Bei der unilateralen diophantischen Gleichung bilden die Zeilen von $\underline{G}$ die rechte Seite. Aus der Ergebnismatrix $\underline{E}$ erhält man die Polynommatrizen $\underline{A}_1(z)$, $\underline{B}_1(z)$ bzw. $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$.

3.4. Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung

Im Eingroßenfall, also für skalare Polynome, kann man die Reihenfolge der Polynommultiplikation auf der linken Seite von Gl. (3.3.1) vertauschen ohne daß sich die Lösungsansätze ändern, denn der Koeffizientenvergleich führt zu identischen linearen Gleichungssystemen. Bei den Polynommatrizen von Mehrgrößensystembeschreibungen gilt diese Kommutativität nicht mehr und man erhält eine weitere Klasse von Polynommatrixgleichungen, die sogenannten bilateralen diophantischen Gleichungen, bei denen die Unbekannten als rechter und linker Multiplikator auftreten.

Unter einer bilateralen diophantischen Polynommatrixgleichung versteht man ein Gleichungssystem der Form

$$\underline{A}(z) \underline{P}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = \underline{R}(z) \quad (3.4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{A} &\in \mathbb{R}^{m \times m}[z], & \underline{B} &\in \mathbb{R}^{1 \times r}[z], & \underline{R} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \\ \underline{P} &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], & \underline{Q} &\in \mathbb{R}^{m \times 1}[z]. \end{aligned}$$

Gesucht werden wiederum die beiden Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$. Die duale bilaterale Gleichung ist definiert durch

$$\underline{P}_1(z) \underline{A}_1(z) + \underline{B}_1(z) \underline{Q}_1(z) = \underline{R}_1(z) \quad (3.4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &\in \mathbb{R}^{r \times r}[z], & \underline{B}_1 &\in \mathbb{R}^{m \times 1}[z], & \underline{R}_1 &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], \\ \underline{P}_1 &\in \mathbb{R}^{m \times r}[z], & \underline{Q}_1 &\in \mathbb{R}^{1 \times r}[z] \end{aligned}$$

und kann, wie die unilaterale Gleichung, durch Transponieren der Polynommatrizen auf beiden Seiten auf die Grundform nach Gl. (3.4.1) zurückgeführt werden.

Gl. (3.4.1) ist z.B. beim Entwurf eines Minimum-Varianz-Reglers im Frequenzbereich zu lösen [K12]. Außerdem tritt sie in der verallgemeinerten Rückwärts-Bezout-Identität [K7] und beim Entwurf eines Reglers nach dem Prinzip des internen Modells [B3] auf. In Kapitel 5 wird dieses Gleichungssystem

chungssystem auch eine wichtige Rolle beim Entwurf von Polynommatrixreglern für Führungs- und Störverhalten spielen.

Die bilaterale Gleichung ist aufwendiger zu lösen als die unilaterale, da die Unbekannten $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ auf beiden Seiten der gegebenen Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ stehen. Bedingt durch die Nichtkommutativität des Matrixprodukts, kann diese Form von Polynommatrixgleichung weder durch Koeffizientenvergleich direkt in ein lineares Gleichungssystem überführt werden, noch ist ein effektives Verfahren, das mittels einer Zustandsraumrealisierung arbeitet, verfügbar.

In der Literatur wird oft vorgeschlagen, die bilaterale Gleichung über die Smith-Form der beiden Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ zu lösen. Wie in Abschnitt 3.4.2 gezeigt wird, erfordert dieses Verfahren jedoch sehr umfangreiche elementare Äquivalenztransformationen mit den Systemmatrizen, so daß die numerisch berechneten Ergebnisse in der Regel unzuverlässig sind. In dieser Arbeit wird Gl. (3.4.1) deshalb durch Bilden des Kronecker-Produktes auf den unilateralen Fall nach Gl. (3.3.1) zurückgeführt. Dieser Lösungsansatz erfordert zwar sehr viel Datenspeicherplatz, liefert aber numerisch brauchbare Ergebnisse. Ein neuer Vorschlag für eine effektivere Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung wird in Abschnitt 3.4.4 angegeben. Dieser Lösungsansatz ist nicht mit einem quadratischen Anwachsen der Dimension der assoziierten linearen Gleichungssysteme verbunden. Für jede Zeile der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ ist stattdessen eine relativ einfache entkoppelte unilaterale Gleichung mit niedriger Polynomordnung zu lösen.

3.4.1 Eigenschaften der bilateralen diophantischen Gleichung

Lösbarkeit

Gl. (3.4.1) ist genau dann lösbar, wenn die beiden Matrizen

$$\begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{Q} \\ \underline{Q} & \underline{B}(z) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{R}(z) \\ \underline{Q} & \underline{B}(z) \end{bmatrix} \quad (3.4.1.1)$$

äquivalent sind, das heißt, sie müssen durch Multiplikation mit unimodularen Matrizen von links und von rechts ineinander überführt werden können. Den ersten Teil dieser Aussage, nämlich daß aus der Existenz einer

Lösung $\underline{P}_0(z)$ und $\underline{Q}_0(z)$ die Äquivalenz der Polynommatrizengleichung, Gl. (3.4.1.1), folgt, ist einfach zu zeigen, denn dann gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{R}(z) \\ \underline{0} & \underline{B}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{A}(z)\underline{P}_0(z) + \underline{B}(z)\underline{Q}_0(z) \\ \underline{0} & \underline{B}(z) \end{bmatrix}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich in Form des Produktes

$$\begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{R}(z) \\ \underline{0} & \underline{B}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{Q}_0(z) \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}(z) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{P}_0(z) \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

schreiben. Der Beweis dafür, daß aus der Äquivalenz die Lösbarkeit folgt, ist viel aufwendiger, deshalb wird hier nur auf die Literatur [K12] verwiesen.

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der bilateralen Gleichung ist gegeben durch

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0(z) - \underline{T}(z) \underline{B}(z) \quad (3.4.1.3.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{Q}_0(z) + \underline{A}(z) \underline{T}(z), \quad (3.4.1.3.b)$$

mit einer speziellen Lösung von Gl. (3.4.1) $\underline{P}_0(z)$, $\underline{Q}_0(z)$ und einer beliebigen Polynommatrix $\underline{T}(z)$. Der Beweis dieser Aussage folgt sofort durch Einsetzen in Gl. (3.4.1).

Lösung minimalen Grades

Eine Lösung minimalen Grades kann man wie bei der unilateralen Gleichung finden, indem man eine Polynommatrizendivision durchführt und dann $\underline{T}(z)$ geeignet wählt. Als Beispiel soll hier nur die Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{P}(z)$ für Gl. (3.4.1) angegeben werden. Hierfür gilt

$$\underline{P}_0(z) = \underline{B}(z) \underline{U}_1(z) + \underline{V}_1(z), \quad \text{grad}_{z1} \underline{V}_1(z) < \text{grad}_{z1} \underline{Q}(z) \quad (3.4.1.4)$$

Mit $\underline{T}(z) = \underline{U}_1(z)$ erhält man

$$\underline{P}(z) = \underline{V}_1(z) \quad (3.4.1.5.a)$$

$$\underline{Q}(z) = \underline{Q}_0(z) + \underline{U}_1(z) \underline{A}(z) . \quad (3.4.1.5.b)$$

3.4.2 Lösung mittels Transformation auf Smith-Form

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist einfach: Wenn die beiden Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ Diagonalform besitzen, dann ergibt sich ein Satz von entkoppelten skalaren Polynomgleichungen, der äquivalent zur bilateralen diophantischen Gleichung ist. Durch Lösung der einzelnen Polynomgleichungen und anschließende Rücktransformation erhält man die gesuchte Lösung.

Zunächst müssen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ mit elementaren Äquivalenztransformationen auf die Smith-Form transformiert werden. Das ergibt

$$\underline{A}_S(z) = \underline{U}_a(z) \underline{A}(z) \underline{V}_a(z) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1(z) & & & & 0 \\ & a_2(z) & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{ka}(z) & 0 \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array} \right] \quad (3.4.2.1.a)$$

und

$$\underline{B}_S(z) = \underline{U}_b(z) \underline{B}(z) \underline{V}_b(z) = \left[\begin{array}{cccc|c} b_1(z) & & & & 0 \\ & b_2(z) & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & b_{kb}(z) & 0 \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array} \right] . \quad (3.4.2.1.b)$$

Setzt man nun Gl. (3.4.2.1a,b) in Gl. (3.4.1) ein so erhält man

$$(\underline{U}_a^{-1}(z) \underline{A}_S(z) \underline{V}_a^{-1}(z)) \underline{P}(z) + \underline{Q}(z) (\underline{U}_b^{-1}(z) \underline{B}_S(z) \underline{V}_b^{-1}(z)) = \underline{R}(z) .$$

Multiplikation mit den Transformationsmatrizen der Smith-Form von links und von rechts ergibt schließlich

$$\underline{\underline{A}}_S(z) (\underline{\underline{V}}_a(z) \underline{\underline{P}}(z) \underline{\underline{V}}_b(z)) + (\underline{\underline{U}}_a(z) \underline{\underline{Q}}(z) \underline{\underline{U}}_b(z)) \underline{\underline{B}}_S(z) = (\underline{\underline{U}}_a(z) \underline{\underline{R}}(z) \underline{\underline{V}}_b(z)) ,$$

was man abgekürzt als

$$\underline{\underline{A}}_S(z) \tilde{\underline{\underline{P}}}(z) + \tilde{\underline{\underline{Q}}}(z) \underline{\underline{B}}_S(z) = \tilde{\underline{\underline{R}}}(z) \quad (3.4.2.2)$$

schreiben kann. Vergleicht man die einzelnen Elemente der linken und der rechten Seite von Gl. (3.4.2.2), so erhält man den gesuchten Satz von entkoppelten Gleichungen

$$a_i \tilde{p}_{ij} + \tilde{q}_{ij} b_j = \tilde{r}_{ij} , \quad i=1, \dots, k_a , \quad j=1, \dots, k_b \quad (3.4.2.3.a)$$

$$a_i \tilde{p}_{ij} = \tilde{r}_{ij} , \quad i=1, \dots, k_a , \quad j=k_b+1, \dots, r \quad (3.4.2.3.b)$$

$$\tilde{q}_{ij} b_j = \tilde{r}_{ij} , \quad i=k_a+1, \dots, m , \quad j=1, \dots, k_b \quad (3.4.2.3.c)$$

$$0 = \tilde{r}_{ij} , \quad i=k_a+1, \dots, m , \quad j=k_b+1, \dots, r . \quad (3.4.2.3.d)$$

Jede einzelne Gleichung kann unabhängig von den anderen gelöst werden. Die bilaterale Gleichung ist genau dann lösbar, wenn Gl. (3.4.2.3a-d) lösbar sind. Die gesuchten Polynommatrizen $\underline{\underline{P}}(z)$ und $\underline{\underline{Q}}(z)$ lauten dann

$$\underline{\underline{P}}(z) = \underline{\underline{V}}_a(z) \tilde{\underline{\underline{P}}}(z) \underline{\underline{V}}_b^{-1}(z) \quad (3.4.2.4.a)$$

$$\underline{\underline{Q}}(z) = \underline{\underline{U}}_a^{-1}(z) \tilde{\underline{\underline{Q}}}(z) \underline{\underline{U}}_b(z) . \quad (3.4.2.4.b)$$

Wie bereits erwähnt, ist die Lösung über die Smith-Form vom numerischen Standpunkt aus kaum brauchbar. Man sollte sich nicht von der Einfachheit der Gl. (3.4.2.3a-d) täuschen lassen, denn schon die Transformation auf Smith-Form kann in der Regel nicht numerisch stabil ausgeführt werden. Deshalb wurde dieses Verfahren weder implementiert noch näher untersucht. Die Grundidee dieses Verfahrens, nämlich ein entkoppeltes Gleichungssystem zu erhalten, wird später in Abschnitt 4.4 aufgegriffen, wobei jedoch das Ziel ohne Durchführung von Äquivalenztransformationen erreicht wird.

3.4.3 Lösung durch Bilden des Kroneckerproduktes

Man kann die bilaterale diophantische Gleichung, Gl. (3.4.1), in eine unilaterale diophantische Gleichung vom Typ Gl. (3.3.2) umwandeln, wenn man die Bestimmungsgleichung für jedes einzelne Element der rechten Seite zu einer unilateralen Gleichung umordnet. Ein Element $r_{ij}(z)$ der rechten Seite ergibt sich aus Gl. (3.4.1) durch Bilden der Skalarprodukte von Zeilen- und Spaltenvektoren der Polynommatrizen zu

$$\underline{a}_i^T(z) \underline{p}_j(z) + \underline{q}_i^T(z) \underline{b}_j(z) = r_{ij}(z) . \quad (3.4.3.1)$$

Durch Transponieren des ersten Summanden, was den Wert des Skalarproduktes nicht ändert, entsteht aus Gl. (3.4.3.1) zwar formal die unilaterale Gleichung

$$\underline{p}_j^T(z) \underline{a}_i(z) + \underline{q}_i^T(z) \underline{b}_j(z) = r_{ij}(z) , \quad (3.4.3.2)$$

jedoch sind die Bestimmungsgleichungen für alle Elemente $r_{ij}(z)$ untereinander verkoppelt. Deshalb ist eine spaltenweise Lösung für die Matrizen $\underline{p}(z)$ und $\underline{q}(z)$ nicht möglich und Gl. (3.4.3.2) muß wiederum in einer Matrixform angeordnet werden, die diese Verkopplungen berücksichtigt. In Matrixform geschrieben erhält man für die einzelnen Spalten

$$\underline{p}_i^T \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \underline{q}_2^T & \dots & \underline{q}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b}_i \\ \underline{b}_i \\ \dots \\ \underline{b}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1i} & r_{2i} & \dots & r_{mi} \end{bmatrix} . \quad i = 1, \dots, r \quad (3.4.3.3)$$

Man erkennt, daß auch alle Spalten von $\underline{p}(z)$ über die Elemente $\underline{q}_i$ miteinander verkoppelt sind. Deshalb werden alle Spalten nach Gl. (3.4.3.3) zu einer unilateralen Gleichung mit den Hypermatrizen gemäß Gl. (3.4.3.4) zusammengefaßt. Damit ergibt sich

$$\tilde{\underline{A}}(z) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_m \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.4.3.4a)$$

$$\tilde{\underline{\underline{B}}}(z) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \underline{b}_1 & & & \underline{b}_2 & & & \underline{b}_r & & \\ & \underline{b}_1 & & & \underline{b}_2 & & & \underline{b}_r & \\ & & \cdot & & & \cdot & \dots & & \cdot \\ & & & \underline{b}_1 & & \underline{b}_2 & & & \underline{b}_r \end{array} \right] \quad (3.4.3.4b)$$

$$\tilde{\underline{\underline{R}}}(z) = [r_{11} \dots r_{m1} \mid r_{12} \dots r_{m2} \mid \dots \mid r_{1r} \dots r_{mr}] \quad (3.4.3.4.c)$$

$$\tilde{\underline{\underline{P}}}(z) = [p_1^T p_2^T \dots p_r^T] \quad (3.4.3.4.d)$$

$$\tilde{\underline{\underline{Q}}}(z) = [q_1^T q_2^T \dots q_m^T] \quad (3.4.3.4.e)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\underline{A}}} &\in \mathbb{R}^{m \times r \times m \times r}[z], & \tilde{\underline{\underline{B}}} &\in \mathbb{R}^{m \times 1 \times m \times r}[z], & \tilde{\underline{\underline{R}}} &\in \mathbb{R}^{1 \times m \times r}[z] \\ \tilde{\underline{\underline{P}}} &\in \mathbb{R}^{1 \times m \times r}[z], & \tilde{\underline{\underline{Q}}} &\in \mathbb{R}^{1 \times m \times 1}[z]. \end{aligned}$$

Mit diesen Matrizen ist nun die unilaterale Gleichung

$$\tilde{\underline{\underline{P}}}(z) \tilde{\underline{\underline{A}}}(z) + \tilde{\underline{\underline{Q}}}(z) \tilde{\underline{\underline{B}}}(z) = \tilde{\underline{\underline{R}}}(z) \quad (3.4.3.5)$$

zu lösen. Dazu wurde in dieser Arbeit das in Abschnitt 3.3.4 beschriebene Verfahren verwendet. Dieses läßt bei den hier auftretenden großen Gleichungssystemen die besten numerischen Resultate erwarten. Anschließend werden die Ergebnisvektoren $\underline{\underline{P}}'(z)$ und $\underline{\underline{Q}}'(z)$ gemäß Gl. (3.4.3.4.d,e) wieder auf die Lösungspolynommatrizen $\underline{\underline{P}}(z)$ und $\underline{\underline{Q}}(z)$ aufgeteilt.

Praktisch ist die Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung durch Bilden des Kroneckerproduktes nur bei Systemen mit geringen Dimensionen anwendbar, denn der benötigte Datenspeicherplatz und die Größe des Gleichungssystems, Gl. (3.4.2.1), nehmen quadratisch mit der Systemdimension zu. Trotzdem rechtfertigen die numerisch vernünftigen Ergebnisse und der relativ geringe Programmieraufwand diese Vorgehensweise, denn es werden lediglich Umsortierungen benötigt.

3.4.4 Lösung durch zeilenweise Auswertung

In dem im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren ist die Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung mit einem quadratischen Anwachsen der Dimension des durch das Kroneckerprodukt entstehenden Gleichungssystems verbunden. Damit ist diese Methode praktisch nur für Systeme mit geringer Anzahl von Ein- und Ausgängen geeignet. Eine Methode, die diesen Nachteil vermeidet, wird im folgenden hergeleitet. Dabei wird für jede Zeile der Polynommatrix $\underline{\underline{B}}(z)$ eine entkoppelte unilaterale Polynommatrizengleichung mit niedriger Polynomordnung erzeugt. Die einzelnen Polynomgleichungen können unabhängig voneinander gelöst werden. Mit der so konstruierten minimalen und daher auch eindeutigen Lösungsmatrix $\underline{\underline{Q}}(z)$ wird dann die Polynommatrix $\underline{\underline{P}}(z)$ mittels einfacher arithmetischer Verknüpfungen berechnet.

Zunächst wird angenommen, daß die Polynommatrix $\underline{\underline{A}}(z)$ mittels elementarer Spaltentransformationen so umgeformt wird, daß gilt

$$\underline{\underline{A}}(z) \underline{\underline{U}}(z) = \underline{\underline{\tilde{A}}}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(z) & 0 & & 0 \\ \tilde{a}_{21}(z) & \tilde{a}_{22}(z) & \dots & \tilde{a}_{2m}(z) \\ \vdots & & & \\ \tilde{a}_{m1}(z) & \tilde{a}_{m2}(z) & \dots & \tilde{a}_{mm}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.4.4.1)$$

$\tilde{a}_{11}(z)$ ist hierbei größter gemeinsamer Teiler aller Polynome der ersten Zeile von $\underline{\underline{A}}(z)$. Einsetzen von Gl. (3.4.4.1) in Gl. (3.4.1) ergibt

$$\underline{\underline{A}}(z) \underline{\underline{U}}(z) \underline{\underline{U}}^{-1}(z) \underline{\underline{P}}(z) + \underline{\underline{Q}}(z) \underline{\underline{B}}(z) = \underline{\underline{R}}(z). \quad (3.4.4.2)$$

Gl. (3.4.4.2) kann abgekürzt geschrieben werden als

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}(z) \underline{\underline{\tilde{P}}}(z) + \underline{\underline{Q}}(z) \underline{\underline{B}}(z) = \underline{\underline{R}}(z) \quad (3.4.4.3)$$

und entspricht formal wiederum Gl. (3.4.1). Betrachtet man nur die erste Zeile dieser Gleichung, so erhält man

$$[\tilde{a}_{11} \dots 0] \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} \dots \tilde{p}_{1r} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{m1} \dots \tilde{p}_{mr} \end{bmatrix} + [q_{11} \dots q_{1l}] \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1r} \\ \vdots \\ b_{l1} \dots b_{lr} \end{bmatrix} = [r_{11} \dots r_{1r}], \quad (3.4.4.4)$$

was äquivalent ist mit

$$[\tilde{p}_{11} \dots \tilde{p}_{1r}] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{11} \end{bmatrix} + [q_{11} \dots q_{1l}] \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1r} \\ \vdots \\ b_{l1} \dots b_{lr} \end{bmatrix} = [r_{11} \dots r_{1r}]. \quad (3.4.4.5)$$

Gl. (3.4.4.5) kann nunmehr auf eine einseitige Polynommatrixgleichung zurückgeführt werden. Da die Ordnung von $\tilde{a}_{11}(z)$ im allgemeinen geringer ist als die Ordnung der Polynomelemente von $\underline{B}(z)$, wird nun mit dem in Abschnitt 3.3.1 angegebenen Verfahren eine Polynomdivision durchgeführt, um eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ sicherzustellen. Die Division ergibt

$$b_{ij}(z) / \tilde{a}_{11}(z) = \tilde{b}_{ij}(z) / \tilde{a}_{11}(z) + d_{bij}(z) \quad (3.4.4.6a)$$

und

$$r_{ij}(z) / \tilde{a}_{11}(z) = \tilde{r}_{ij}(z) / \tilde{a}_{11}(z) + d_{rij}(z). \quad (3.4.4.6b)$$

Mit den Polynomen $\tilde{b}_{ij}(z)$ und $\tilde{r}_{ij}(z)$ erhält man die unilaterale Gleichung

$$[\tilde{p}_{11} \dots \tilde{p}_{1r}] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{11} \end{bmatrix} + [q_{11} \dots q_{1l}] \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} \dots \tilde{b}_{1r} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{l1} \dots \tilde{b}_{lr} \end{bmatrix} = [\tilde{r}_{11} \dots \tilde{r}_{1r}] \quad (3.4.4.7)$$

für die erste Zeile der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$. Ebenso wie diese Zeile kann man auch alle anderen Zeilen der Lösungspolynommatrix $\underline{Q}(z)$ unabhängig voneinander aus einer unilateralen Gleichung vom Typ Gl. (3.4.4.7) berechnen. Dazu ist nur die Kenntnis des größten gemeinsamen Teilers der jeweiligen Zeile von $\underline{A}(z)$ nötig. Dieser muß nicht durch elementare Spaltentransformationen berechnet werden, sondern kann auch dem numerisch stabilen Algorithmus nach Abschnitt 3.2 erzeugt werden. Weiterhin ist fast stets der größte gemeinsame Teiler aller Polynome einer Zeile kein Polynom sondern ein konstanter reellwertiger Faktor, so daß in der Regel der

Rechenaufwand durch die hier beschriebene Vorgehensweise erheblich reduziert wird.

Da es sich um eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ handelt, ist $\underline{Q}(z)$ eindeutig bestimmt. Jetzt kann man die Polynommatrix $\underline{P}(z)$ aus der ursprünglichen beidseitigen Gleichung bestimmen. Damit gilt

$$\underline{A}(z) \underline{P}(z) = \underline{R}(z) - \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = \underline{\tilde{R}}(z) \quad (3.4.4.8)$$

Die beiden Gln. (3.4.4.6,7) können mit den Methoden aus Abschnitt 3.3.3 oder Abschnitt 3.3.4 gelöst werden.

Damit steht auch für die Lösung der bilateralen diophantischen Gleichung ein einfach zu implementierendes Verfahren zur Verfügung. Die Rückführung auf die Lösung der unilateralen Gleichung, sei es über das Kroneckerprodukt oder über die Aufspaltung in Teilprobleme durch Berechnung des größten Polynomteilers einer Zeile, macht es möglich die numerisch zuverlässigen Verfahren des Abschnitts 3.3 zu nutzen. Später wird in Abschnitt 5.2 die Synthesegleichung eines Reglers mit internem Stör- und Führungsmodell angegeben die mit den Verfahren dieses Abschnitts zu lösen ist. Darüber unabhängig kann die bilaterale Gleichung in der Synthese von Modellfolge- und Minimum-Varianz-Regelungen [K12] eingesetzt werden.

3.5 Spektralfaktorisierung von Polynommatrizen

Nach [K12] wurde die Idee der Faktorisierung von Matrizen gebrochen rationaler Funktionen erstmalig im Jahre 1949 in Zusammenhang mit der Theorie der Wiener'schen Optimal-Filter veröffentlicht. Als Anwendungsgebiete, insbesondere in der Nachrichtentechnik, werden in der Literatur die Netzwerksynthese für n-Tore und der Entwurf von Digitalfiltern angegeben [V4, Y2]. Auch in der Regelungstechnik wird die Spektralfaktorisierung für den Entwurf quadratisch optimaler Zustandsregler und für Synthese von Minimum-Varianz-Reglern und Kalman-Filtern eingesetzt [K14, K13]. So ist es nicht verwunderlich, daß bei diesem breiten Anwendungsgebiet zahlreiche Methoden formuliert wurden [A2, A3, D5, H1, R1, V2, V4, Y1], um die Faktorisierung für rationale Funktionen, Polynome und Polynommatrizen durchzuführen. Teilweise wird das Problem auch über den Umweg einer Realisierung des Übertragungssystems im Zustandsraum auf die Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung zurückgeführt. Unter Berücksichtigung der numerischen Eigenschaften der Algorithmen wurden in dieser Arbeit zwei Verfahren aus- gesucht, um das Problem der Spektralfaktorisierung für diskrete Systeme in der Beschreibung durch Polynommatrizen effizient zu lösen. Dies sind das Verfahren nach Youla und Kazanian [Y1], das mit der Cholesky-Faktorisierung arbeitet und in Abschnitt 3.5.1 beschrieben wird. Weiterhin wird in Abschnitt 3.5.2 ein auf der Newton-Raphson-Iteration basierendes Verfahren angegeben, das als diskrete Version des von Heister in [H1] für kontinuierliche Systembeschreibungen formulierten Verfahrens angesehen werden kann.

3.5.1 Spektralfaktorisierung durch rekursive Cholesky-Zerlegung

Für eine parahermitesche Polynommatrix $\underline{P}(z)$ mit m Zeilen und m Spalten

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) & p_{1m}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1}(z) & p_{m2}(z) & p_{mm}(z) \end{bmatrix} \quad (3.5.1.1)$$

mit Polynomen

$$p_{ij}(z) = p_{ij,0} + \sum_{\mu=1}^n (p_{ij,\mu} z^{\mu} + p_{ij,-\mu} z^{-\mu}) \quad (3.5.1.2)$$

der maximalen Ordnung n , erhält man eine äquivalente Darstellung

$$\underline{P}(z) = \underline{P}_0 + \sum_{\mu=1}^n (\underline{P}_{\mu} z^{\mu} + \underline{P}_{-\mu} z^{-\mu}) \quad (3.5.1.3)$$

in der Schreibweise als Matrixpolynom. Für die Matrixkoeffizienten dieses Polynoms gilt

$$\underline{P}_{\mu} = \begin{bmatrix} p_{11\mu} & p_{12\mu} & & p_{1n\mu} \\ p_{21\mu} & p_{22\mu} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1\mu} & p_{n2\mu} & & p_{nn\mu} \end{bmatrix} \quad (3.5.1.4)$$

Für eine parahermitesche Polynommatrix gilt allgemein

$$\underline{P}(z) = \underline{P}^T(1/z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.5.1.5)$$

mit den Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} \underline{P}_0 &= \underline{P}_0^T \\ \underline{P}_{\mu} &= \underline{P}_{-\mu}^T, \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.5.1.6)$$

Das Faktorisierungsproblem besteht darin, eine Polynommatrix $\underline{L}(z)$ zu finden, so daß gilt

$$\underline{P}(z) = \underline{L}(z) \underline{L}^T(1/z). \quad (3.5.1.7)$$

Für den Fall einer Polynommatrix des Grades Null ist Gl. (3.5.1.9) durch Cholesky-Faktorisierung [W4] des dann einzig vorhandenen Koeffizienten $\underline{P}_0$ zu erfüllen. Im allgemeinen Fall erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem, das nicht mehr geschlossen nach den gesuchten Koeffizienten der Polynommatrix $\underline{L}(z)$ umformbar ist.

$$\underline{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} \underline{H}_0^{(0)} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{H}_1^{(1)} & \underline{H}_0^{(1)} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{H}_2^{(2)} & \underline{H}_1^{(2)} & \underline{H}_0^{(2)} & \underline{0} \\ \underline{H}_3^{(3)} & \underline{H}_2^{(3)} & \underline{H}_1^{(3)} & \underline{H}_0^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (3.5.1.11)$$

wobei berücksichtigt wird, daß diese Matrix die Dimension $(n+1)m \times (n+1)m$ besitzt. Der hochgestellte Index der Matrixkoeffizienten dient als Zähler für das rekursive Verfahren und kennzeichnet die Reihenfolge in der die einzelnen Blockzeilen von $\underline{H}^{(3)}$ entstanden sind. Bei jedem weiteren Schritt in der Rekursion ist die Matrix $\underline{T}$ aus Gl. (3.5.1.10) um eine Blockspalte rechts und eine Blockzeile unten zu erweitern und daraus ist durch die Zerlegungsvorschrift die nächste Matrix $\underline{H}^{(i+1)}$ zu berechnen. Durch die Rekursion entsteht nach insgesamt i Schritten die Matrix

$$\underline{H}^{(i)} = \begin{bmatrix} \underline{H}_0^{(0)} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{H}_1^{(1)} & \underline{H}_0^{(1)} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & . \\ \underline{H}_2^{(2)} & \underline{H}_1^{(2)} & \underline{H}_0^{(2)} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & . \\ \underline{H}_3^{(3)} & \underline{H}_2^{(3)} & \underline{H}_1^{(3)} & \underline{H}_0^{(3)} & \underline{0} & & . \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \dots & \underline{0} & \underline{H}_3^{(i)} & \underline{H}_2^{(i)} & \underline{H}_1^{(i)} & \underline{H}_0^{(i)} & \end{bmatrix}. \quad (3.5.1.12)$$

Mit jedem Rekursionsschritt i wurde der Matrix $\underline{H}^{(i)}$ eine neue rechte Blockspalte und eine weitere untere Blockzeile hinzugefügt, wobei sich sukzessive die Bandstruktur nach Gl. (3.5.1.9) ergibt. Zur Berechnung der Matrix $\underline{H}^{(i+1)}$ bzw. der neuen letzten Blockzeile genügt es, die Matrixkoeffizienten aus der rechten unteren Teilmatrix der Dimension $n \times n$ in der Matrix $\underline{H}^{(i)}$ zu berücksichtigen. Sämtliche Zeilen oberhalb und alle Spalten links neben dieser Untermatrix sind redundant und werden für die weitere Rechnung nicht benötigt. Mit zunehmender Anzahl von Rekursionsschritten konvergieren die Koeffizienten $\underline{H}_k^{(i)}$ der unteren Blockzeile von $\underline{H}^{(i)}$ gegen die gesuchten Koeffizienten $\underline{L}_j$ der Cholesky-Zerlegung nach Gl. (3.5.1.9), denn es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{H}_k^{(i)} = \underline{L}_k. \quad (3.5.1.13)$$

Praktisch kann die Iteration beendet werden, wenn im Schritt i das Abbruchkriterium

$$\max |h_{k,lj}^{(i)} - h_{k,lj}^{(i-1)}| < \epsilon \quad (3.5.1.14)$$

$$0 \leq k < n, 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq m$$

erfüllt ist. Die gesuchte Lösung $\underline{L}(z)$ zu Gl. (3.5.1.18) kann nach Beendigung der Iteration der untersten Blockzeile der Matrix $\underline{H}^{(i)}$ als

$$\underline{L}(z) = \underline{H}_0^{(i)} + \underline{H}_1^{(i)} z + \dots + \underline{H}_k^{(i)} z^k. \quad (3.5.1.15)$$

entnommen werden. Der stabile spektrale Faktor $\underline{L}(z)$ ist eindeutig, da die symmetrische Blockmatrix aus Gl. (3.5.1.8) in ein Produkt zweier eindeutiger Matrizen faktorisiert wurde.

Das Verfahren ist einfach zu implementieren und erfordert nur einen geringfügigen Aufwand für die Verwaltung der Kopieroperationen. Das Konvergenzverhalten ist jedoch äußerst schlecht. Da aber kein Anfangswert benötigt wird, ist die rekursive Cholesky-Faktorisierung sehr gut als Anlaufverfahren für Methoden wie die im nächsten Abschnitt dargestellte Newton-Raphson-Iteration geeignet.

3.5.2 Spektralfaktorisierung mittels der Newton-Raphson-Methode

Im vorangehenden Abschnitt wurden schon darauf hingewiesen, daß der Koeffizientenvergleich für die Lösung der Spektralfaktorisierung im allgemeinen zu einem nichtlinearen Gleichungssystem führt. Ein Standardverfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungen ist die Newton-Raphson-Methode, die in der Umgebung einer einfachen Nullstelle quadratisch gegen die Lösung konvergiert.

Die auf den vektoriellen Fall verallgemeinerte Iterationsvorschrift lautet

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \left[\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \bigg|_{\underline{x}=\underline{x}^{(k)}} \right]^{-1} \underline{f}(\underline{x}^{(k)}), \quad (3.5.2.1)$$

womit man einen Lösungsvektors $\underline{x}_0$ berechnet kann, so daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$\underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{0} \quad (3.5.2.2)$$

erfüllt ist.

Das Problem der Spektralfaktorisierung kann damit so reformuliert werden, daß die Parameter der Polynommatrix $\underline{L}(z)$ als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems entsprechend Gl. (3.5.2.9) erhalten werden. Es ist lediglich notwendig, das Gleichungssystem auf die Standardform zu bringen und die Gesetzmäßigkeiten für das Berechnen der Jacobi-Funktionalmatrix

$$\underline{J} = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \bigg|_{\underline{x} = \underline{x}^{(k)}}$$

anzugeben.

Für die parahermitesche Polynommatrix, Gl. (3.5.1), mit dem Lösungsansatz nach Gl. (3.5.1.7), kann man durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{L}_0 & & & & \\ \underline{L}_1 & \underline{L}_0 & & & \\ \underline{L}_2 & \underline{L}_1 & \underline{L}_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \underline{L}_n & \underline{L}_{n-1} & \underline{L}_{n-2} & \dots & \underline{L}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L}_n^T \\ \underline{L}_{n-1}^T \\ \underline{L}_{n-2}^T \\ \vdots \\ \underline{L}_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{-n} \\ \underline{P}_{-n+1} \\ \underline{P}_{-n+2} \\ \vdots \\ \underline{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_n^T \\ \underline{P}_{n-1}^T \\ \underline{P}_{n-2}^T \\ \vdots \\ \underline{P}_0 \end{bmatrix} \quad (3.5.2.3)$$

ansetzen, wobei für das Lösungsmatrixpolynom

$$\underline{L}(z) = \underline{L}_0 + \underline{L}_1 z + \dots + \underline{L}_n z^n \quad (3.5.2.4)$$

gilt, Gl. (3.5.2.3) ist eine Matrizengleichung und kann abgekürzt als

$$\tilde{\underline{M}} \tilde{\underline{X}} = \tilde{\underline{P}} \quad (3.5.2.5)$$

geschrieben werden. Da das Newton-Raphson-Verfahren nach Gl. (3.5.2.1) eine Vektorfunktion benötigt, muß Gl. (3.5.2.5) durch Aneinanderreihen aller

Spalten der Matrizen $\tilde{\underline{X}}$ und $\tilde{\underline{P}}$ in vektorieller Schreibweise formuliert werden. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{M}} & \underline{0} & & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \tilde{\underline{M}} & \underline{0} & & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \underline{0} & & \tilde{\underline{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{p}_m \end{bmatrix} \quad (3.5.2.6)$$

Wegen der Symmetrie des Absolutkoeffizienten $\underline{P}_0$ des parahermiteschen Matrixpolynoms $\underline{P}(z)$ enthält das Gleichungssystem, Gl. (3.5.2.6), einige linear abhängige Funktionsgleichungen. Dies betrifft genau die Elemente im Vektor $\tilde{\underline{x}}$, die zu Koeffizienten des unteren Dreiecks von $\underline{P}_0$ gehören. Werden diese redundanten Variablen und ebenso die dazugehörigen Zeilen und Spalten der Koeffizientenmatrizen $\tilde{\underline{M}}$ gestrichen, so erhält man ein Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_1 & \underline{0} & & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_2 & \underline{0} & & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \underline{0} & & \underline{M}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (3.5.2.7)$$

oder in kurzer Schreibweise

$$\underline{M} \underline{x} = \underline{c} \quad , \quad (3.5.2.8)$$

bei dem die Redundanz beseitigt ist. Nach [H1] kann man für den Ansatz der Polynommatrizen in Popov-Form [F3] zusätzlich die Funktionsgleichungen eliminieren, welche zu strukturell verschwindenden Koeffizienten der Polynommatrix gehören. Dieser Ansatz, der die Zahl der Gleichungen erheblich reduziert, kann hier leider nicht durchgeführt werden, da die in Kapitel 5 dargestellten Syntheseverfahren einen allgemeineren Ansatz haben als der in [H1] durchgeführte Entwurf proportionaler Zustandsregler.

Mit der in Gl. (3.5.2.8) angegebenen Vektorfunktion, die in der Standarddarstellung für Gl. (3.5.2.2) die Funktion

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{M} \underline{x} - \underline{c} \quad (3.5.2.9)$$

liefert, kann die Jacobi-Matrix, wie im Fall skalarer Polynome nach [K12] als

$$\underline{J} = \underline{M} + \underline{N} \quad (3.5.2.10)$$

dargestellt werden, so daß die Iterationsbeziehung, Gl. (3.5.2.1), durch

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - (\underline{N} + \underline{M})^{-1} (\underline{M} \underline{x}^{(k)} - \underline{c}) \quad (3.5.2.11)$$

ausgedrückt werden kann. Mit der Gültigkeit von

$$\underline{M} \underline{x} = \underline{N} \underline{x} \quad (3.5.2.12)$$

[D2,H1], kann die vom rechentechnischen Standpunkt her ungünstige Gl. (3.5.2.11) wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} (\underline{M} + \underline{N}) \underline{x}^{(k+1)} &= \underline{M} \underline{x}^{(k)} + \underline{N} \underline{x}^{(k)} - \underline{M} \underline{x}^{(k)} + \underline{c} \\ \underline{x}^{(k+1)} &= (\underline{M} + \underline{N})^{-1} \underline{M} \underline{x}^{(k)} + (\underline{M} + \underline{N})^{-1} \underline{c} \\ \underline{x}^{(k+1)} &= \frac{1}{2} (\underline{x}^{(k)} + (\underline{M} + \underline{N})^{-1} 2 \underline{c}) . \end{aligned} \quad (3.5.2.13)$$

Wie man aus Gl. (3.5.2.13) erkennt, ist es nicht notwendig den Funktionswert $\underline{f}(\underline{x})$ zu berechnen. Eine Implementierung des numerischen Algorithmus erfordert lediglich ein Aufstellen der Jacobi-Matrix $\underline{J}$. Ihre LR-Zerlegung und die Lösung für die rechte Seite $\underline{c}$ kann mit Standardverfahren nach [D9] erfolgen. Abschliessend ist in Tabelle 3.5.2.1 ein Strukturbeispiel für eine Jacobi-Matrix für eine Polynommatrix $\underline{P}(z)$ der Dimension (3×3) mit höchster Polynomordnung zwei angegeben.

Für eine wie beschrieben strukturierte Polynommatrix $\underline{P}(z)$ sind 24 Koeffizienten l_{ijk} des Faktorisierungsergebnisses $\underline{L}(z)$ zu bestimmen. Damit enthält der Vektor $\underline{x}$ 24 Elemente, die in geeigneter Weise in den Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{N}$ anzuordnen sind. Tabelle 3.5.2.1 gibt in zeilen- und spaltenweiser Zuordnung die Indizes i der Elemente x_i und damit auch die Position der Koeffizienten an, wie sie in der Jacobi-Matrix anzuordnen sind. Man erkennt bestimmte Symmetrien, die sich jedoch nicht wie im Fall der Faktorisierung skalarer Polynome ausnutzen lassen, wo man durch Triangularisierung von Invertmatrizen [H1] einfache Lösungsschemata erhält.

Zeilen- vektor	Spaltenindex der Matrizen <u>M</u> bzw. <u>N</u>																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\frac{n}{m} \frac{T}{1}$	7	-	-												1	2								
2	14	15	-																					
3	22	23	24																			1	2	3
4	4	5	6	7	1	2	3	4																
5	11	12	13	14	15	-					1	2	3	4	5									
6	19	20	21	22	23	24																		
7	1	2	3	4	5	6	7																	
8								8	7	-	-					8	9							
9								14	15	-														
10								22	23	24												8	9	10
11				8	9	10	11	4	5	6	7													
12								11	12	13	14	15	-											
13								19	20	21	22	23	24									8	9	10
14								1	2	3	4	5	6	7										
15								8	9	10	11	12	13	14	15									
16							16																	
17															16	17	7	-	-					
18																	14	15	-					
19																								
20																	22	23	24					
21																	4	5	6	7				
22																	11	12	13	14	15	-		
23																								
24																	16	17	18	19	20	21		
																	19	20	21	22	23	24		
																	1	2	3	4	5	6	7	
																	8	9	10	11	12	13	14	15
																	16	17	18	19	20	21	22	23
																	16	17	18	19	20	21	22	23

Tabelle 2.5.2.1: Änderung der Elemente des Vektors $\vec{v}$ in der Zeile $\vec{v}_i$ Matrix

Die Methode der rekursiven Cholesky-Faktorisierung in Verbindung mit dem Newton-Raphson-Verfahren stellt eine einfache und effiziente Möglichkeit zur spektralen Faktorisierung von Polynommatrizen einer diskreten Systembeschreibung zur Verfügung. Ihren Einsatz findet die Faktorisierung im Entwurf quadratisch optimaler Regelkreise. Die Synthesevorschrift wird in Abschnitt 5.4 angegeben, die praktische Erprobung dieser Regelverfahren wird im sechsten Kapitel diskutiert.

3.6 Berechnung der invarianten Nullstellen einer Polynommatrix

Ist in der Systembeschreibung die Zählermatrix $\underline{Q}(z)$ nichtsingulär, d.h. quadratisch und von vollem Rang, dann können die Nullstellen der Polynommatrix als Eigenwerte der Zustandsraumrealisierung des Systems $\underline{I} \underline{Q}^{-1}(z)$ berechnet werden. Dieses Vorgehen ist durch die Definition der Nullstellen als Pole des inversen Systems nach [W9] gewährleistet. Die Einschränkung auf den Sonderfall quadratischer Polynommatrizen macht es notwendig ein allgemein anwendbares Verfahren anzugeben.

Eine Möglichkeit einen Zugriff auf die Nullstellen der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ zu erhalten, ist die Transformation auf Dreiecksform [K12] oder im Fall einer nicht quadratischen Matrix auf Hermite-Form [K7]. Diese Transformation ist beschreibbar durch Prämultiplikation mit einer unimodularen Polynommatrix $\underline{L}(z)$ und Postmultiplikation mit einer reellwertigen Permutationsmatrix $\underline{T}_p$. Dann besitzt das Ergebnis

$$\underline{Q}_h(z) = \underline{L}(z) \underline{Q}(z) \underline{T}_p \quad (3.6.1)$$

für den Fall, daß die $(l \times m)$ -Polynommatrix mit $l > m$ den Rang r besitzt, die Struktur

$$\underline{Q}_h(z) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11}(z) & \tilde{q}_{12}(z) & & \tilde{q}_{1m}(z) \\ 0 & \tilde{q}_{22}(z) & & \tilde{q}_{2m}(z) \\ & & \ddots & \\ & & \tilde{q}_{rr}(z) & \dots & \tilde{q}_{rm}(z) \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

Ein numerisch orientierter Algorithmus sollte diese Methode nicht verwenden, denn die mittels elementaren Polynommatrizenoperationen generierte unimodulare Transformation ist numerisch nicht stabilisierbar. Auch kann der Rangtest nicht zufriedenstellend durchgeführt werden. Weiterhin ist fast stets der gesamte Grad der Polynommatrix $\underline{Q}_h(z)$ in der Polynomordnung eines Diagonalelements konzentriert. Aus all diesen Gründen ergeben sich numerisch stark gestörte Polynome, die zudem auch noch einen hohen Grad

besitzen. Deshalb sollten diese Verfahren nicht für eine Rechnerimplementierung herangezogen werden.

Eine weitere Möglichkeit die Nullstellen eines Übertragungssystems in Polynommatrizendarstellung zu erhalten, besteht darin, das System $(\underline{P}(z), \underline{Q}(z))$ als Zustandsraumbeschreibung $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$ zu realisieren, um dann bekannte Algorithmen zur Berechnung der Nullstellen von Systemen in Zustandsraumbeschreibung auszunutzen. Auch diese Vorgehensweise muß kritisiert werden, denn erstens ist die für eine Realisierung nach Anhang A1 notwendige Zeilen- oder Spaltenreduktion der Nennermatrix $\underline{P}(z)$ oftmals problematisch und weiterhin finden auch die Parameter von $\underline{P}(z)$ Eingang in die Beschreibung. Diese liefern jedoch keinen Beitrag zu den Nullstellen des Systems.

Da auch die zweite angegebene Möglichkeit abzulehnen ist, soll ein anderes Verfahren angegeben werden, das als beweisbar numerisch rückwärtsstabil bezeichnet werden kann. Das Ziel besteht darin, eine zur Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ äquivalente Beschreibung zu erzeugen, die die gleichen invarianten Nullstellen wie die gegebene Polynommatrix besitzt. Für diese Darstellungsform sollen die Algorithmen nach [E3] einsetzbar sein.

Wenn man die Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ durch ein Monom z^k dividiert, mit

$$k = \max \text{grad}_{s_i} \underline{Q}(z), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.3)$$

d.h. der höchsten Potenz aller Polynomelemente von $\underline{Q}(z)$, dann erhält man ein System $(\underline{Q}(z), \underline{P}^*(z))$, welches sofort realisierbar ist. Die Diagonalmatrix

$$\underline{P}^*(z) = \text{diag} (z^k) \quad (3.6.4)$$

ist nämlich mit Sicherheit spaltenreduziert. Wegen Gl. (3.6.3) besitzt $(\underline{Q}(z), \underline{P}^*(z))$ eine echt rationale Übertragungsmatrix. Für den rechten Polynommatrixquotienten

$$\begin{aligned} \underline{G}^*(z) &= \underline{Q}(z) \underline{P}^{*-1}(z) = \underline{Q}(z) \text{diag} (z^{-k}) \\ &= \underline{C}^* (z \underline{I} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{B}^* + \underline{D}^* \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

kann eine steuerbare Realisierung $(\underline{A}^*, \underline{B}^*, \underline{C}^*, \underline{D}^*)$ sehr einfacher Struktur angegeben werden, da die führende Spaltenkoeffizientenmatrix $\underline{P}^*$ HSK die Einheitsmatrix ist und die niedere Spaltenkoeffizientenmatrix $\underline{P}^*$ NSK eine $(m \times km)$ -Nullmatrix bildet. Deshalb enthält $\underline{B}^*$ die Einheitsmatrix und $\underline{A}^*$ ist

nilpotent vom Index k . Im einzelnen sind die Matrizen des hierzu gehörenden Zustandsraumsystems gegeben durch

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 0_m & \underline{I}_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{I}_m \\ & & & & 0_m \\ 0_m & \dots & & & 0_m \end{bmatrix}, \quad \underline{B}^* = \begin{bmatrix} 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} \quad (3.6.6)$$

$$\underline{C}^* = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{D}^* = \begin{bmatrix} Q_k \end{bmatrix}.$$

Hier wurde für die Realisierung die gestaffelte Frobenius-Form [H1, P3] gewählt, die für gleiche Spaltengrade der Nennerpolynommatrix, also gleiche Steuerbarkeitsindizes n_{si} , keine Stufen in der Außendiagonalen aufweist. Nun soll die Smith-Äquivalenz der invarianten Nullstellen der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ und des Systems $\{\underline{A}^*, \underline{B}^*, \underline{C}^*, \underline{D}^*\}$ gezeigt werden. Dazu wird die zur Zustandsraumdarstellung, Gl. (3.6.6), zugehörige Rosenbrock-Systemmatrix als Matrixbüschel

$$\underline{T}^*(z) = z\underline{E} - \underline{H} = \begin{bmatrix} z\underline{I}_m & & & \\ & z\underline{I}_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & z\underline{I}_m \\ & & & & 0_{l \times m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{A}^* & \underline{B}^* \\ \underline{C}^* & \underline{D}^* \end{bmatrix} \quad (3.6.7)$$

geschrieben. Multipliziert man Gl. (3.6.7) von rechts mit der unimodularen Block-Toeplitz-Matrix

$$\underline{V}(z) = \begin{bmatrix} \underline{I}_m & & & \\ z\underline{I}_m & \underline{I}_m & & \\ z^2\underline{I}_m & z\underline{I}_m & \underline{I}_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ z^k\underline{I}_m & z^{k-1}\underline{I}_m & \dots & z\underline{I}_m & \underline{I}_m \end{bmatrix}, \quad (3.6.8)$$

dann erhält man

$$\underline{T}^*(z) \underline{V}(z) = \begin{bmatrix} \underline{O}_m & \underline{I}_m & & & \\ \underline{O}_m & \underline{O}_m & \underline{I}_m & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \underline{I}_m \\ \underline{Q}(z) & \underline{R}_1(z) & \underline{R}_2(z) & \dots & \underline{R}_k(z) \end{bmatrix}, \quad (3.6.9)$$

mit

$$\underline{R}_k(z) = \underline{Q}_k, \quad \underline{R}_{k-1}(z) = z \underline{R}_k + \underline{Q}_{k-1}. \quad (3.6.10)$$

Wird Gl. (3.6.9) mit

$$\underline{L}(z) = \begin{bmatrix} \underline{O}_m & \underline{O}_m & \dots & \underline{O}_m & \underline{I}_m \\ -\underline{I}_m & & & \underline{R}_1(z) & \\ & -\underline{I}_m & & \underline{R}_2(z) & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & -\underline{I}_m & \underline{R}_k(z) \end{bmatrix}, \quad (3.6.11)$$

prämultipliziert, so erhält man

$$\underline{L}(z) \underline{T}^*(z) \underline{V}(z) = \text{block-diag} [\underline{I}_m \dots \underline{I}_m \underline{Q}(s)] . \quad (3.6.12)$$

Aus Gl. (3.6.12) folgt die Smith-Äquivalenz des Matrixbüschels $(z\underline{E} - \underline{H})$ und der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$, denn für die Determinante von $\underline{V}(z)$ gilt

$$|\underline{V}(z)| = 1 ,$$

da sie eine untere Dreiecksform besitzt und ihre Diagonale mit Eins-Elementen besetzt ist. Wird die Determinante von $\underline{L}(z)$ nach der ersten Blockzeile und der letzten Blockspalte entwickelt, dann erkennt man sofort deren Unabhängigkeit vom Parameter z .

Ist $\underline{Q}(z)$ eine reguläre Polynommatrix, derart, daß $l=m$ und Rang $\underline{Q}_k = m$ gilt, dann kann das Matrixbüschel sofort mit

$$\tilde{Q}_i = Q_k^{-1} Q_i$$

zu

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \underline{0}_m & \underline{I}_m & & & \\ \underline{0}_m & \underline{0}_m & \underline{I}_m & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \underline{I}_m \\ \tilde{Q}_0(z) & \tilde{Q}_1(z) & \tilde{Q}_2(z) & \dots & \tilde{Q}_{k-1}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.6.13)$$

weiter reduziert werden. Da dieser Schritt im allgemeinen numerisch nicht stabilisierbar ist, sollte er aber nach Möglichkeit unterbleiben.

Das zu lösende numerische Problem ist nach Gl. (6.3.7) darauf reduziert aus dem im allgemeinen singulären Matrizenbüschel $zE - H$ ein reguläres Matrizenbüschel zu erzeugen. Weiterhin ist anzugeben, wie die invarianten Nullstellen dieses äquivalenten Systems zu berechnen sind. Die Lösung dieses Problems ist in [E3] angegeben. Zunächst wird Gl (3.6.6) mittels

$$\underline{V}_1(z) \begin{bmatrix} z\underline{I}_{n-\underline{A}}^* & \underline{B}^* \\ \underline{C}^* & \underline{D}^* \end{bmatrix} \underline{L}_1(z) = \begin{bmatrix} z\underline{I}_{n1}-\underline{A}_1 & \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I}_{n-n2} \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

auf ein äquivalentes System transformiert, in dem die Untermatrix $\underline{D}_1$ vollen Zeilenrang, $\text{Rang } \underline{D}_1 = 1$, besitzt. In einem zweiten Transformationsschritt

$$\underline{V}_2(z) \begin{bmatrix} z\underline{I}_{n1}-\underline{A}_1 & \underline{B}_1 \\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1 \end{bmatrix} \underline{L}_2(z) = \begin{bmatrix} z\underline{I}_{n2}-\underline{A}_2 & \underline{B}_2 & \underline{0} \\ \underline{C}_2 & \underline{D}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I}_{n1-n2} \end{bmatrix} \quad (3.6.15)$$

wird ein System mit invertierbarem $\underline{D}_2$ erzeugt. Die Transformation, die hier als unimodulare Transformation beschrieben wird, kann in der numerischen Version nach [E3] mittels unitärer Householder-Transformation ausgeführt werden, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Die Nullstellen des Systems sind durch die Eigenwerte von

$$\tilde{\underline{A}}_2 = \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{D}_2^{-1} \underline{C}_2 \quad (3.6.16)$$

gegeben. Die rechte Seite von Gl. (3.6.16) beschreibt eine Zustandsrückführung, die $\underline{C}_2$ annulliert, also das System $\{\underline{A}_2, \underline{B}_2, \underline{C}_2, \underline{D}_2\}$ maximal unbeobachtbar macht. Dabei wird unter jede Nullstelle ein Pol geschoben, so daß das rückgekoppelte System n_2 Ausgangentkoppelnde Nullstellen (output decoupling zeros [R2]) als Eigenwerte aufweist.

Wie schon beim speziellen Problem nach Gl. (3.6.13) angemerkt, kann die tatsächliche Ausführung der Inversion der Durchgangsmatrix nach Gl. (3.6.16) zu numerischer Instabilität führen. Deshalb wird $\underline{C}_2$ mittels Householder-Transformation [W4] von links gemäß

$$\begin{bmatrix} z\underline{I}_{n_2} - \underline{A}_2 & \underline{B}_2 \\ \underline{C}_2 & \underline{D}_2 \end{bmatrix} \underline{T}_H = \begin{bmatrix} z\underline{B}_f - \underline{A}_f & \tilde{\underline{B}}_2 \\ \underline{0} & \tilde{\underline{D}}_2 \end{bmatrix} \quad (3.6.15)$$

annulliert. Jetzt können die invarianten Nullstellen nicht mehr aus einem Eigenwertproblem gewonnen werden, sondern müssen als verallgemeinerte Eigenwerte, also als Wurzeln der Gleichung

$$z\underline{B}_f - \underline{A}_f = \underline{0}$$

berechnet werden. Dies kann mittels der QZ-Algorithmen nach [D9] geschehen. Abschliessend sei noch angemerkt, daß die Reduktion zu einem regulären Matrizenbüschel weitere wichtige systemtheoretische Informationen über die Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ liefert, nämlich

- a) den Rang des Systems $\underline{G}(z) = \underline{Q}(z) \underline{P}^{-1}(z)$ als Rang der Durchgangsmatrix $\underline{D}_2$,
- b) den Grad der Polynommatrix $\underline{Q}(z)$ als Zahl ihrer invarianten Nullstellen n_2 , entsprechend der Dimension der Matrix $\underline{A}_2$.

Mit der hier angegebenen Methode steht ein zuverlässiges Verfahren zur Verfügung, um Pole und Nullstellen eines Übertragungssystems, das durch einen Polynommatrixquotienten beschrieben wird, zu berechnen. Durch Auswertung der invarianten Nullstellen lassen sich Aussagen über Stabilität und Minim-

Polynommatrix $[\underline{A}(z) \ \underline{B}(z)]^T$ eines Systems $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$ berechnet. Damit sind also auch Aussagen über die Primheit von Polynommatrizen möglich.

4. Parameterschätzung für Mehrgrößensysteme

Das Aufstellen eines Modells in Form eines Polynommatrixquotienten kann direkt durch Laplace-Transformation bzw. z-Transformation der das Regelsystem beschreibenden linearen Differentialgleichungen bzw. Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten erfolgen. Die Vorgehensweise entspricht hierbei der des skalaren Falles. Mit der Berechnung eines Primmatrixproduktes aus der Zustandsraumdarstellung nach Abschnitt 3.1 steht eine andere Möglichkeit zur Verfügung, einen Polynommatrixquotienten zu bestimmen. Weiterhin gestattet die duale prime Faktorisierung nach Abschnitt 3.3 die Berechnung eines primen Polynommatrixquotienten aus der Übertragungsmatrix. Hierbei wird zunächst durch spalten- oder zeilenweise Hauptnennerbildung eine triviale Polynommatrixbeschreibung erzeugt. Durch Extrahieren eventuell vorhandener Teiler erhält man schließlich ebenfalls ein Primmatrixprodukt. Damit ist es möglich, aus den wichtigsten Beschreibungsformen linearer Mehrgrößensysteme einen Polynommatrixquotienten zu gewinnen.

Die Polynommatrixdarstellung linearer Mehrgrößensysteme beschreibt das Ein- und Ausgangsverhalten eines Regelsystems und sie sollte gerade dann Verwendung finden, wenn über den inneren Aufbau eines Systems nur geringe Kenntnisse vorhanden sind. Dann liegen oft nur zusammengehörige Datensätze oder Messungen des zeitlichen Verlaufs der Eingangs- und Ausgangssignale des dynamischen Systems vor. Die meisten Verfahren zur Schätzung der Parameter eines Regelsystems aus gemessenen Signalen sind für die Systembeschreibung durch Übertragungsmatrizen [D7, U2] formuliert. Bei der Umrechnung zwischen den Systemdarstellungen treten jedoch numerische Fehler auf. Weiterhin erhält man durch die Schätzung mittels eines Teil- oder Einzelmodellansatzes [D7] eine für den Reglerentwurf mittels Polynommatrixmethoden ungeeignete Struktur, denn die zitierten Methoden liefern zwar Beschreibungen mit einer geringen Anzahl von Parametern, jedoch ist die Systemordnung im Sinne einer minimalen Zustandsraumrealisierung oftmals unnötig hoch.

Daher muß eine direkte Methode zur Schätzung der Parameter eines Mehrgrößensystems in Form eines linken Polynommatrixquotienten bereitgestellt werden. Das Aufstellen der Schätzgleichungen ist recht einfach, denn man braucht unter Beachtung der kanonischen Struktur der Popov-Form [B2] die skalare Darstellung der Modellstruktur nach [U2] nur für den vektoriellen Fall anzupassen. Die Betrachtung einer assoziierten Zustandsraumdarstellung nach [G5], wo das Mehrgrößenschätzproblem mittels kanonischen Polynomma-

trixbeschreibungen zuerst formuliert wurde, ist hier nicht notwendig, da in dieser Arbeit Analyse und Synthese in der Polynommatrixbeschreibung durchgeführt werden.

In Abschnitt 4.1 wird eine Modellstruktur in Form eines "Least-Squares-Modells" [U2] gewählt, womit die Schätzgleichungen für einen linken Polynommatrixquotienten angegeben werden können. Ein Verfahren für die numerische Lösung dieser Schätzgleichungen wird in Abschnitt 4.2 diskutiert.

4.1. Modellstruktur und Schätzgleichungen

Die Aufgabe der Parameteridentifikation besteht darin, aus Meßsignalen die Parameter des mathematischen Modells zu ermitteln. Hierbei geht man von der Vorstellung aus, daß dieses Modell dem tatsächlichen System parallel geschaltet ist und die Ausgangsgrößen $y(k)$ und $y_M(k)$ miteinander verglichen werden. Für ein richtig angepaßtes Modell ist die Abweichung der Ausgangssignale

$$e^*(k) = y(k) - y_M(k) \quad (4.1.1)$$

hinreichend klein. Das Modell wird hier in Form eines linken Polynommatrixquotienten angesetzt, so daß gilt

$$Y_M(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z) \underline{u}(z) . \quad (4.1.2)$$

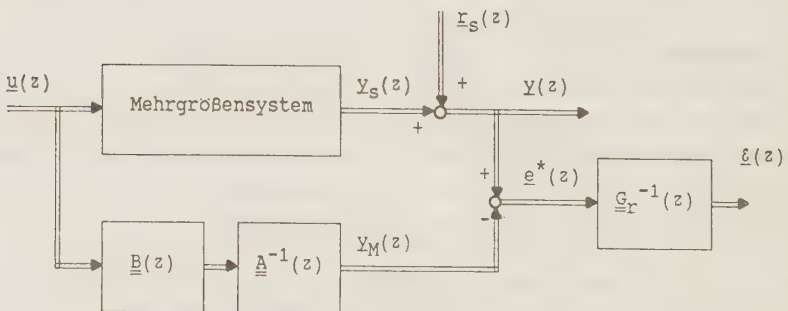


Bild 4.1.1 Nachbildung der Ausgangssignale unter Einbeziehung eines Störmodells $\underline{G}_r(z)$

Die meßbaren Ausgangssignale setzen sich im allgemeinen aus den ungestörten Signalen $y_S(k)$ und den stochastischen, durch die Eingangsgrößen nicht beeinflussbaren Störsignalen $r_S(k)$ gemäß

$$y(k) = y_S(k) + r_S(k) \quad (4.1.3)$$

zusammen. Die vektorielle Differenz der Ausgangssignale $e^*(k)$ kann also nur dann verschwinden, wenn die Störungen zusätzlich durch ein geeignetes Störmodell beschrieben werden.

Dazu ist der Modellansatz aus Gl. (4.1.2) nach dem Blockschaltbild, Bild 4.1.1, zu erweitern, um den gestörten Ausgangssignalvektor besser nachzubilden. Hierbei werden die auf den Ausgang einwirkenden Störsignale $r_S(k)$ durch gefiltertes weißes Rauschen beschrieben. Mit dem Störmodellansatz

$$\underline{G}_r(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{G}_r^*(z), \quad (4.1.4)$$

bei dem auf eine Faktorisierung der Übertragungsmatrizen $\underline{G}_r^*(z)$ und $\underline{G}_r(z)$ verzichtet wurde, ergibt sich das erweiterte Modell zu

$$y(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{B}(z) u(z) + \underline{A}^{-1}(z) \underline{G}_r^*(z) \varepsilon(z). \quad (4.1.5)$$

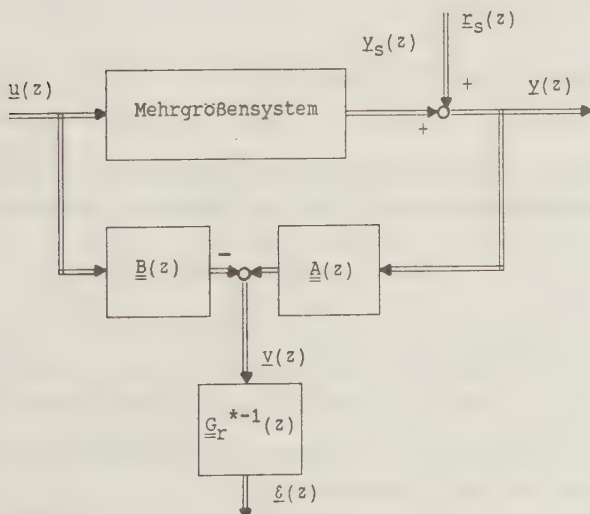


Bild 4.1.2 Blockschaltbild zum verallgemeinerten Gleichungsfehler

Durch Multiplikation mit $\underline{A}(z)$ von links erhält man aus Gl. (4.1.5)

$$\underline{A}(z) \underline{Y}(z) - \underline{B}(z) \underline{u}(z) = \underline{G}_r^*(z) \underline{\varepsilon}(z) = \underline{v}(z) , \quad (4.1.6)$$

worin die rechte Seite den verallgemeinerten Gleichungsfehler oder auch Modellausgangsfehler als korreliertes Störsignal beschreibt. Dieser Zusammenhang ist durch das System nach Bild 4.1.2 darstellbar. Der korrelierte Modellfehler $\underline{v}(z)$ erscheint darin als Größe, die über das Störmodell geleitet aus weißem Rauschen erzeugt wird.

Wie bei der Parameterschätzung für lineare Eingrößensysteme mit erweiterten Modellansätzen [U2] können auch für den Mehrgrößenfall Störmodelle beschrieben durch Polynommatrizen berücksichtigt werden. Um die Notation einfach zu halten, wird im weiteren vorausgesetzt, daß für das Störmodell $\underline{G}_r^*(z)$ die Einheitsmatrix gewählt wird, so daß die Parameterschätzung mit Hilfe eines "Least-Squares"-Ansatzes erfolgen kann. Der verallgemeinerte Gleichungsfehler $\underline{v}(k)$ muß dann die idealisierten Eigenschaften des weißen Rauschens besitzen. Die Modellgleichung für das hier vorliegende Schätzproblem lautet somit

$$\underline{A}(z) \underline{Y}(z) = \underline{B}(z) \underline{u}(z) + \underline{\varepsilon}(z) . \quad (4.1.7)$$

Zeilenweises Ausmultiplizieren der rechten und linken Seite von Gl. (4.1.7) liefert zunächst das Gleichungssystem

$$a_{i1}(z)y_1(z) + \dots + a_{im}(z)y_m(z) = b_{i1}(z)u_1(z) + \dots + b_{ir}(z)u_r(z) + \varepsilon_i(z) \\ i = 1, 2, \dots, m , \quad (4.1.8)$$

dessen i-te Gleichung auf der linken Seite noch sämtliche Modellausgangsgrößen enthält. Nach Separation der Diagonalpolynomelemente, die in der Popov-Form den Zeilengrad $v_{ii} = n_{zi}$ besitzen, gemäß

$$a_{ii}(z) y_i(z) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij}(z) y_j(z) + \sum_{j=1}^r b_{ij}(z) u_j(z) + \varepsilon_i(z) , \\ i = 1, 2, \dots, m , \quad (4.1.9)$$

können nach Rücktransformation in die diskrete Zeitbereichsdarstellung die Differenzengleichungen der Modellausgänge zu

$$y_i(k+v_{ii}) = - \sum_{\mu=0}^{v_{ii}-1} a_{ii\mu} y_i(k+\mu) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \sum_{\mu=0}^{v_{ij}} a_{ij\mu} y_j(k+\mu) + \\ + \sum_{j=1}^r \sum_{\mu=0}^{v_{ij}-1} b_{ij\mu} u_j(k+\mu) + \varepsilon_i(k) . \quad (4.1.10)$$

bestimmt werden. Hierbei wurde ausgenutzt, daß die führende Zeilenkoeffizientenmatrix $\bar{A}_{\text{HZK}}$ untere Dreiecksform mit normierter Hauptdiagonale besitzt. Die Polynome $b_{ij}(z)$ sind für das hier angenommene nicht sprungfähige System von geringerem Grad als das Diagonalelement $a_{ii}(z)$. Damit kann für jeden Ausgang des Modells eine Gleichung der Form

$$y_i(k+v_{ii}) = \underline{m}_i^T(k+v_{ii}) \underline{p}_i + \varepsilon_i(k) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1.11)$$

aufgestellt werden, worin der Datenvektor

$$\underline{m}_i(k+v_{ii}) = [-y_1(k) \dots -y_1(k+n_{1i}) \mid \dots \\ \dots \mid -y_m(k) \dots -y_m(k+n_{im}) \mid \\ \mid u_1(k) \dots u_1(k+v_{1i}) \mid \dots \mid u_r(k) \dots u_r(k+v_{ri})] \quad (4.1.12)$$

nur Meßwerte und der Parametervektor

$$\underline{p}_i = [a_{ii0} \quad \dots \quad a_{ii n_{1i}} \mid \dots \mid a_{im0} \quad \dots \quad a_{im n_{im}} \mid \\ \mid b_{ii0} \quad \dots \quad b_{ii v_{1i}} \mid \dots \mid b_{ir0} \quad \dots \quad b_{ir v_{ri}}] \quad (4.1.13)$$

sämtliche zu schätzenden Größen enthält. Der normierte führende Koeffizient der Polynome $a_{ii}(z)$ erscheint dabei nicht im Parametervektor, denn es gilt

$$n_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & , \text{ für } i \neq j \\ v_{ij}-1 & , \text{ für } i = j . \end{cases}$$

Faßt man für jeden Modellausgang die Modellgleichung, Gl. (4.1.11), mit den abgetasteten Signalwerten für N Zeitpunkte zusammen, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\underline{y}_i(N) = \underline{M}_i(N) \underline{p}_i + \underline{\varepsilon}_i(N) \quad (4.1.14)$$

mit dem Signalvektor

$$Y_i(N) = [Y_i(v_{ii}+1) \quad Y_i(v_{ii}+2) \quad \dots \quad Y_i(v_{ii}+N)]^T, \quad (4.1.15)$$

und der Datenmatrix

$$\underline{M}(N) = \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T(v_{ii}+1) \\ \underline{m}_i^T(v_{ii}+2) \\ \vdots \\ \underline{m}_i^T(v_{ii}+N) \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

sowie einem Fehlervektor

$$\underline{\varepsilon}_i(N) = [\varepsilon_i(1) \quad \varepsilon_i(2) \quad \dots \quad \varepsilon_i(N)]^T. \quad (4.1.17)$$

Die Aufgabe der Parameterschätzung besteht nun darin eine Lösung des Gleichungssystems, Gl. (4.1.14), zu bestimmen. Im allgemeinen lassen sich aufgrund der hohen Anzahl gemessener Ein- und Ausgangssignale erheblich mehr Gleichungen aufstellen als unbekannte Parameter vorhanden sind. Das Gleichungssystem ist also überbestimmt und eine Berechnung des Parametervektors bei gleichzeitiger Beachtung aller Gleichungen muß an Nebenbedingungen geknüpft werden, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Hierfür kann gefordert werden, den Parametervektor p_i so zu bestimmen, daß die Summe der Fehlerquadrate

$$I_i(p_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon_i^2(k) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_i^T(N) \underline{\varepsilon}_i(N) \quad (4.1.18)$$

minimiert wird. Durch Umformen von Gl.(4.1.14) und Einsetzen in das Gütekriterium, Gl. (4.1.18), ergibt sich

$$I_i(p_i) = \frac{1}{2} \left[Y_i(N) - \underline{M}_i(N) p_i \right]^T \left[Y_i(N) - \underline{M}_i(N) p_i \right] \stackrel{!}{=} \text{Min}, \quad (4.1.19)$$

so daß durch Auswertung der partiellen Ableitung

$$\left. \frac{\partial I_i(p_i)}{\partial p_i} \right|_{p_i = \hat{p}_i} = - \underline{M}_i^T(N) Y_i(N) + \underline{M}_i^T(N) \underline{M}_i(N) \hat{p}_i = 0 \quad (4.1.20)$$

die Vorschrift zu Berechnung des gesuchten Parametervektors

$$\hat{P}_1 = [\underline{M}_1^T(N) \underline{M}_1(N)]^{-1} \underline{M}_1^T(N) \underline{Y}_1(N) \quad (4.1.21)$$

folgt. Nach Einführung der Abkürzungen

$$\underline{M}_1^*(N) = \underline{M}_1^T(N) \underline{M}_1(N) , \quad (4.1.22)$$

$$\underline{Y}_1^*(N) = \underline{M}_1^T(N) \underline{Y}_1(N) \quad (4.1.23)$$

ergibt sich zur Berechnung aller Modellparameter die einfache Beziehung

$$\hat{P}_i = \underline{M}_i^{*-1}(N) \underline{Y}_i^*(N) , \quad i = 1, 2, \dots, m . \quad (4.1.24)$$

Die hier dargestellte Lösung ist damit völlig äquivalent zum Eingroßenfall [U2]. Durch Ausnutzen der Struktur der kanonischen Popov-Form erhält man m lineare Gleichungssysteme, die mit Standardmethoden gelöst werden können. Unter numerischen Gesichtspunkten sollten die Parameter nicht aus der Normalengleichung, Gl. (4.1.24), berechnet werden, obwohl sofort Methoden wie Gauß-Algorithmus oder LR-Zerlegung für symmetrische Matrizen zur Lösung einsetzbar sind. Wie die gesuchten Parameter unter Minimierung des Gütekriteriums, Gl. (4.1.18), direkt aus Gl. (4.1.14) bestimmt werden können, soll im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

4.2 Numerische Lösung des Schätzproblems

Zahlreiche Methoden zur Lösung des Schätzproblems liefern den Parametervektor $\hat{P}$ über eine implizite oder explizite Inversion der quadratischen und symmetrischen Matrix $\underline{M}^*(N)$ in Gl. (4.1.24) ^{*)}, unabhängig davon ob es sich dabei um "off-line"-Verfahren oder rekursive Ansätze handelt, die mittels des Matrixinversionslemmas [U2] formuliert werden. Direkte numerische Verfahren zur Lösung überbestimmter Gleichungssysteme [L2, D9] gehen von Gl. (4.1.14) aus und ermitteln über eine Orthogonaltransformation der Datenmatrix $\underline{M}(N)$, die mittels der Zerlegung nach singulären Werten oder der

*) Um die Darstellung übersichtlich zu halten wird in diesem Abschnitt auf die Indizierung der Meßwertmatrizen für die einzelnen Modellausgänge verzichtet.

QR-Faktorisierung ausgeführt wird, einen Parametervektor $\hat{\underline{p}}$, der den Fehlervektor minimiert. Ein Unterschied dieser Ansätze besteht zunächst im Rechenaufwand, der zur Aufstellung der Normalengleichung, Gl. (4.1.24), notwendig ist. Für n_1 Parameter benötigt man in der Größenordnung $N \cdot n_1^2$ Gleitkommaoperationen, um die Matrix $\underline{M}^*(N)$ und den Vektor $\underline{y}^*(N)$ zu berechnen. Die explizite Bestimmung von $\underline{M}^*(N)$ und $\underline{y}^*(N)$ gemäß Gl. (4.1.22,23) macht es unumgänglich, Skalarprodukte von Vektoren der Länge N zu bilden, wobei N oftmals in der Größenordnung von 10^3 liegt. Dabei belastet ein Digitalrechner aufgrund der endlichen Darstellungsbreite reeller Zahlen die Ergebnisse mit Rundungsfehlern. Dies wiederum bedeutet, daß die Berechnung der Parameter auf Gleichungsgrößen basiert, die neben stochastischen noch zusätzlich erhebliche numerische Störungen enthalten. Um dies zu vermeiden, soll hier eine als numerisch stabil bekannte direkte Methode nach [L2] Verwendung finden, die, wie später gezeigt wird, auch "on-line" eingesetzt werden kann.

Das in dieser Arbeit verwendete numerische Verfahren basiert auf der QR-Faktorisierung der Datenmatrix

$$\underline{M}(N) = \underline{Q} \begin{bmatrix} \underline{R}(N) \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

worin die orthogonale Matrix $\underline{Q}$ die Dimension $N \times N$ besitzt und $\underline{R}(N)$ eine quadratische Matrix der Dimension $n_1 \times n_1$ mit oberer Dreiecksform ist. Wird Gl. (4.2.1) in die Lösungsgleichung des LS-Problems nach Gl. (4.1.24) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \underline{R}(N) \\ \underline{0} \end{bmatrix}^T \underline{Q}^T \underline{Q} \begin{bmatrix} \underline{R}(N) \\ \underline{0} \end{bmatrix} \hat{\underline{p}} = \begin{bmatrix} \underline{R}(N) \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{Q}^T \underline{y}(N), \quad (4.2.2)$$

wobei das Produkt der orthogonalen Matrix $\underline{Q}$ mit dem Spaltenvektor $\underline{y}(N)$ in

$$\underline{Q}^T \underline{y}(N) = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{y}}(N) \\ \tilde{\underline{e}}(N) \end{bmatrix}. \quad (4.2.3)$$

übergeht. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Matrix $\underline{Q}$ folgt weiterhin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(N) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(N) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(N) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(N) \\ \tilde{\mathbf{e}}(N) \end{bmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Datenmatrix $\mathbf{M}(N)$ den vollen Rang n_1 besitzt, ist $\mathbf{R}(N)$ eine reguläre Matrix, so daß aus Gl.(4.2.4) durch Multiplikation von links mit $\mathbf{R}^{-T}(N)$ das gestaffelte Gleichungssystem

$$\mathbf{R}(N) \hat{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{y}}(N) \quad (4.2.5)$$

erhalten wird, woraus der Parametervektor sofort mittels Rücksubstitution gewonnen werden kann. Jetzt muß noch gezeigt werden, daß die Normen von $\mathbf{e}(N)$ und $\tilde{\mathbf{e}}(N)$ gleich sind, so daß das Minimum für die Lösung nach Gl. (4.2.5) und Gl. (4.1.24) übereinstimmt. Für die Fehlernorm gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(N)\|^2 &= \|\mathbf{M}(N)\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{y}(N)\|^2 = \|\mathbf{Q}^T\mathbf{M}(N)\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{Q}^T\mathbf{y}(N)\|^2 = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R}(N) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(N) \\ \tilde{\mathbf{e}}(N) \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &= \|\mathbf{R}(N)\hat{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{y}}(N)\|^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}(N)\|^2. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Da nach Voraussetzung $\mathbf{M}(N)$ und damit auch $\mathbf{R}(N)$ den vollen Rang besitzen, verschwindet der erste Summand in Gl. (4.2.6), so daß die Normen der Fehler übereinstimmen.

Die Konstruktion der orthogonalen Transformation kann mittels der Methode von Householder oder durch Givens-Rotation [W4] erfolgen. Hierbei setzt sich die Transformation aus einer Folge von elementaren Reflektionen zusammen, so daß die Matrix $\mathbf{Q}$ nicht aufgestellt werden muß. Bedingt durch die hohe Dimension der Datenmatrix $\mathbf{M}(N)$ ist es auch nicht sinnvoll, diese Matrix komplett aufzustellen. Ähnlich wie in Abschnitt 3.3.4, wo eine sequentielle QR-Zerlegung für das Hinzufügen von Spalten verwendet wurde, kann auch Gl. (4.2.5) sequentiell zerlegt werden [L2]. Es wird angestrebt ein pseudorekursives Verfahren zu erhalten. Somit ist die Verwendung der spaltenweise vorgehenden Householder-Transformation unangebracht, da in jedem Abtastschritt genau eine Zeile zur Meßwertmatrix hinzugefügt wird. Für diesen Fall eignet sich jedoch die Givens-Rotation sehr gut, da sie nicht spaltenorientiert arbeitet und man durch eine elementare Reflektion gezielt ein Element annullieren kann.

Zur Herleitung eines pseudorekursiven Schätzalgorithmus unter Verwendung der Givens-Rotation kann man vom gestaffelten Gleichungssystem, Gl.(4.2.5), für den k-ten Abtastschritt

$$\underline{R}(k) \hat{\underline{p}}_k = \tilde{\underline{y}}(k) \quad (4.2.7)$$

ausgehen. Werden in Gl.(4.2.7) der transformierte Spaltenvektor $\tilde{\underline{y}}(k)$ und die Matrix $\underline{R}(k)$ durch Hinzufügen eines neuen Elementes $y(k+1)$ und einer neuen letzten Zeile $\underline{m}^T(k+1)$ erweitert, dann kann die hierbei entstandene Matrix

$$\tilde{\underline{R}}(k) = \begin{bmatrix} \underline{R}(k) \\ \underline{m}^T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}(k) & \dots & r_{1n_1}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & r_{n_1 n_1}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1(k+1) & \dots & m_{n_1}(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

der Dimension $(n_1+1) \times n_1$ durch Multiplikation von links mit einer orthogonalen Matrix wieder auf eine quadratische Matrix mit oberer Dreiecksform transformiert werden. Als Ergebnis dieser Transformation erhält man wiederum eine QR-Zerlegung, so daß aus

$$\begin{bmatrix} \underline{R}(k+1) \\ \dots \\ \underline{0} \end{bmatrix} \hat{\underline{p}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{y}}(k+1) \\ \dots \\ \tilde{\varepsilon}(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

der neue Parametervektor $\hat{\underline{p}}_{k+1}$ durch einfache Rücksubstitution berechnet werden kann. Ebenso kann der Schätzwert des Modellfehlers $\|\varepsilon(k+1)\|$ direkt entnommen werden. Also muß jede Givens-Rotation dargestellt durch die orthogonale Matrix $\underline{Q}_j$ in der letzten Zeile der Matrix $\tilde{\underline{R}}(k)$ genau ein Nullelement erzeugen. Bei Beachtung der Struktur der nichtquadratischen Matrix, Gl. (4.2.8), besitzt jeder elementare orthogonale Reflektor die Form

$$Q_j = \begin{bmatrix} I_j & & \\ & s & c \\ & & I_1 \\ & c & -s \end{bmatrix}, \quad l = n_1 - j - 1, \quad (4.2.10)$$

worin die Elemente s und c durch

$$s = r_{jj}(k) [r_{jj}^2(k) + m_j^2(k)]^{-1/2}, \quad (4.2.11.a)$$

$$c = m_j(k) [r_{jj}^2(k) + m_j^2(k)]^{-1/2} \quad (4.2.11.b)$$

gegeben sind.

Beim pseudorekursiven Verfahren gibt es keine Wahlmöglichkeit, wie bei rekursiven Schätzmethoden, für die Anfangswerte. Hier muß gelten

$$R(0) = \underline{0}, \quad P_0 = \underline{0}, \quad (4.2.12)$$

denn der Parametervektor wird nicht schrittweise angepaßt, sondern in jedem Abtastschritt durch Rücksubstitution neu berechnet. Es müssen mindestens soviel Meßwerte wie zu schätzende Parameter vorhanden sein, damit die Rücksubstitution zum ersten Mal durchgeführt werden kann. Im Gegensatz zu rekursiven Verfahren ist die Konvergenz der Parameter hier nicht durch Anfangswerte beeinflusbar, denn das Ergebnis ist für $\hat{p}(N)$ identisch mit einer "off-line" durchgeführten QR-Zerlegung. Sogar in jedem Rekursionsschritt erhält man das Ergebnis $\hat{p}(k)$ so, als würde ein "off-line"-Algorithmus mit einer Meßreihe der Länge k durchgeführt werden. Insbesondere ist hier nicht wie bei rekursiven Verfahren, die mit einer Anpassung der Kovarianzmatrix arbeiten, ein "estimator-windup" zu befürchten. Auch ohne eine exponentielle Gewichtung der Meßwerte tritt hier nicht das Problem auf, daß zu schnell konvergierende Kovarianzmatrizen schlechte Parameterkonvergenz zur Folge haben [U2]. Zur Identifikation von Systemen, deren Parameter sich im Verhältnis zur Eigendynamik nur langsam ändern, ist durch die Modifikation

$$\rho R(k) \hat{p}_k = \rho \tilde{Y}(k), \quad 0,95 \leq \rho \leq 0,99, \quad (4.2.13)$$

auch bei einem pseudorekursiven Verfahren eine Gewichtung älterer Meßdaten möglich.

Für eine genauere Untersuchung der numerischen Eigenschaften des hier angegebenen Verfahren sei hier auf [K8] verwiesen, wo die pseudorekursive Methode mit RLS-Parameterschätzung und indirekten Verfahren, wie Gauss-Algorithmus und LR-Zerlegung zur Faktorisierung der Normalengleichung verglichen wird. Die hier vorgestellte Methode wird in Abschnitt 6.2 für die Parameterschätzung des Mehrgrößenmodells eines Turbogeneratorsatzes eingesetzt, so daß dort eine weitergehende Diskussion ihrer praktischen Eigenschaften durchgeführt wird.

5. Synthese von Regelkreisen

Der Entwurf zahlreicher Reglertypen im Zeitbereich mit Hilfe von Zustandsraummethoden ist zur Standardaufgabe des Regelungstechnikers geworden. Die allgemeine Verfügbarkeit validierter numerischer Algorithmen für grundlegende lineare Algebra [D9, G2] und Analyse- sowie Syntheseverfahren [B6] für Systeme in Zustandsraumdarstellung hat für eine weite Verbreitung dieser Entwurfsmethodik gesorgt. Dieses Kapitel handelt davon, wie die Standardentwurfsverfahren für proportionale Zustandsregler und Beobachter [P3], PI-Zustandsregler [U2], Folgeregler [D3] und entkoppelnde Regler [W9] auf algebraische Synthesemethoden, die mit einer Systembeschreibung mittels Polynommatrizen arbeiten, übertragen werden können. In dieser Arbeit werden die gängigen Entwurfsmethoden für Kompensationsregler, wie z.B. Reglerentwürfe auf endliche Einstellzeit [K3, W8] oder Minimum-Varianz-Regelstrategien [K14], nicht betrachtet, da der Mangel an Robustheit dieser Reglertypen ihren praktischen Einsatz nur für wenige Regelstrecken zuläßt.

Die Synthese von Regelsystemen in der Beschreibung mittels Polynommatrizen bietet gegenüber den in der Zustandsraumdarstellung formulierten Verfahren einige Vorteile:

- Viele Ansätze, die vom Umgang mit Eingrößenübertragungsfunktionen bekannt sind, können für Mehrgrößensysteme in Polynommatrizendarstellung analog übernommen werden.
- Die kanonischen Polynommatrizenmodelle nach Abschnitt 3.3 können direkt aus den Eingangs- und Ausgangssignalen der Regelstrecke mittels Parameterschätzmethoden identifiziert werden, wie in Kapitel 4 gezeigt wurde. Für den Reglerentwurf ist daher keine Umrechnung der Systemdarstellung nötig. Damit ist es leicht, den Reglerentwurf auch "on-line" durchzuführen.
- Der Entwurf von Folge-reglern für verschiedene Arten von Störungen kann mit Hilfe des Prinzips des 'internen Modells' sehr leicht vereinheitlicht werden.
- Entwurfsfreiheitsgrade lassen sich mittels der allgemeinen Lösung der Entwurfsgleichungen einfach erkennen. Damit ergeben sich auch einige neue Möglichkeiten, wie z.B. die freie Vorgabe des Anfangswertes der

Stellgröße nach einer Ausgangsstörung unter Invarianz der Führungsübertragungsfunktion.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird der Entwurf eines Zustandsreglers mit Beobachter in der Beschreibung durch Polynommatrizen hergeleitet. Dabei wird das Syntheseproblem auf die Lösung der in Abschnitt 3.3 eingeführten unilateralen diophantischen Gleichung zurückgeführt. Im zweiten Abschnitt wird dieser Regelkreis für die asymptotische Ausregelung von Führungs- und Störgroßen erweitert, wobei für die Berechnung der Reglerpolynommatrizen auch die bilaterale Polynommatrixgleichung eingesetzt wird. Der dritte Abschnitt stellt einen dynamisch entkoppelnden Regler vor. Hierbei wird das Entkopplungsnetzwerk durch eine einfache Polynommatrixidentität gewonnen. Abschliessend wird eine quadratisch optimale Regelstrategie aufgezeigt, bei der die charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises durch Spektralfaktorisierung nach Abschnitt 3.5 gewonnen wird.

5.1 Entwurf des Zustandsreglers mit Beobachter im Frequenzbereich

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie das in Bild 5.1.1 dargestellte übliche P-Zustandsregler-Beobachter-Konzept auf die Synthese dynamischer Ausgangsrückführungen mittels Polynommatrizenreglern übertragen werden kann. Die Darstellung beruht im wesentlichen auf Ergebnissen, die Wolovich in [W9] angegeben hat, wobei hier jedoch weder der verallgemeinerte Kompensator eingeführt wird, noch die Entwurfsmethodik nach [W9] genutzt wird.

Das Ziel einer Zustandsregelung ist es, durch eine geeignete Zustandsrückführungsmatrix $\underline{F}$ sowohl die Pole als auch die Eigenbewegungen des geschlossenen Regelkreises vorzugeben. Voraussetzung hierfür ist die Steuerbarkeit der Regelstrecke. In der Beschreibung durch Polynommatrizen bedeutet die Festlegung von Polen und Eigenvektoren die Vorgabe einer charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises.

Da die Zustandsgrößen der Regelstrecke im allgemeinen nicht meßbar sind, muß ein Beobachter eingesetzt werden, um den Zustandsvektor zu schätzen. Damit der geschätzte Zustandsvektor gegen den tatsächlichen konvergieren kann, wird der Schätzfehler $\underline{y} - \hat{\underline{y}}$ über eine Matrix $\underline{H}$ in das Beobachtersystem zurückgeführt. Mit der Matrix $\underline{H}$ werden, falls die Regelstrecke beobachtbar ist, die Pole und die Eigenbewegungen des Schätzfehlersystems vollständig festgelegt.

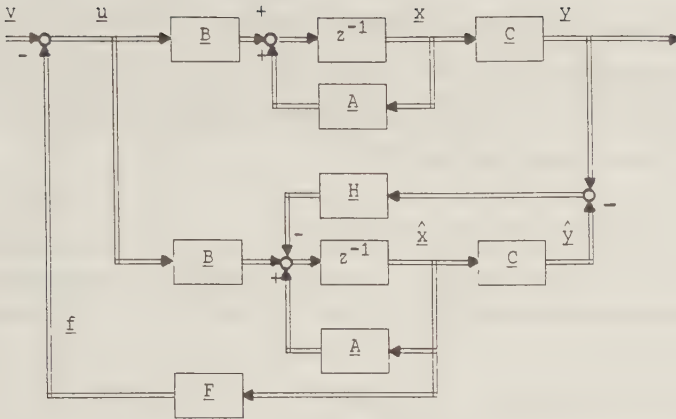


Bild 5.1.1. Zustandsregler-Beobachter-Regelkreis in Zustandsraumdarstellung

In der Systemdarstellung mittels Polynommatrizen entspricht dies wiederum der Vorgabe einer charakteristischen Polynommatrix für das Übertragungssystem des Beobachters. Für den Entwurf eines P-Zustandsreglers mit Beobachter im Frequenzbereich müssen also die charakteristischen Polynommatrizen des geschlossenen Regelkreises und des Beobachters frei vorgegeben werden können.

Beschreibung des Regelsystems durch Polynommatrixquotienten

In dem in Bild 5.1.1 dargestellten Zustandsregler-Beobachter-Regelkreis kann das Rückführungssignal $\underline{f}(k)$ als Ausgangsgröße eines Reglersystems mit den beiden vektoriellen Eingangsgrößen $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ aufgefaßt werden. Hierfür gilt die Zustandsraumbeschreibung

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = (\underline{A} - \underline{H} \underline{C}) \hat{\underline{x}}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) + \underline{H} \underline{y}(k)$$

$$\underline{f}(k) = \underline{F} \hat{\underline{x}}(k) .$$

Nach Anwendung der z-Transformation auf dieses Systems ergibt sich der Zusammenhang

$$\underline{f}(z) = \underline{F} (z \underline{I} - \underline{A} + \underline{H} \underline{C})^{-1} \underline{B} \underline{u}(z) + \underline{F} (z \underline{I} - \underline{A} + \underline{H} \underline{C})^{-1} \underline{H} \underline{Y}(z) \quad (5.1.1)$$

zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen der dynamischen Rückführung. Gl. (5.1.1) zeigt, daß die Rückführgröße $\underline{f}(z)$ durch zwei Übertragungsmatrizen aus der Stellgröße $\underline{u}(z)$ und der Ausgangsgröße $\underline{y}(z)$ erzeugt wird. Diese beiden Übertragungsmatrizen können als linke Polynommatrizenquotienten mit gemeinsamer Nennerpolynommatrix $\underline{N}(z)$ mittels

$$\underline{f}(z) = \underline{N}^{-1}(z) \underline{P}(z) \underline{u}(z) + \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{y}(z) \quad (5.1.2)$$

dargestellt werden. Damit ist der Regelkreis in Bild 5.1.2 in Bezug auf sein Ein- Ausgangsverhalten völlig äquivalent zu dem in Bild 5.1.1 dargestellten System.

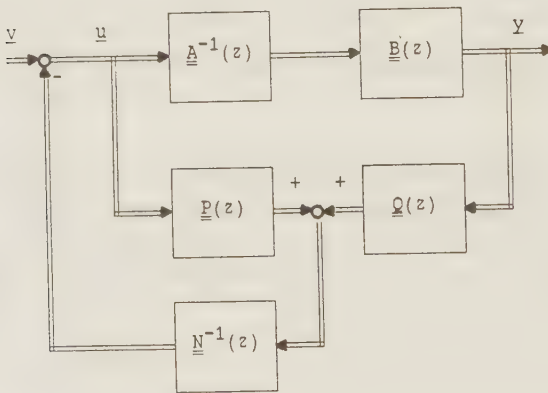


Bild 5.1.2 Zustandsregler-Beobachter-Regelkreis in der Beschreibung durch Polynommatrizen

Das Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises

Die Führungsübertragungsmatrix $\underline{G}_{yv}(z)$ des geschlossenen Regelkreises kann man folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{u}(z) &= \underline{v}(z) - \underline{N}^{-1}(z) (\underline{P}(z) \underline{u}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z)) \\ (\underline{I} + \underline{N}^{-1}(z) \underline{P}(z) + \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)) \underline{u}(z) &= \underline{v}(z) \\ (\underline{N}(z) \underline{A}(z) + \underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z)) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z) &= \underline{N}(z) \underline{v}(z) \\ \underline{u}(z) &= \underline{A}(z) [(\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z)]^{-1} \underline{N}(z) \underline{v}(z) \end{aligned}$$

$$Y(z) = \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) u(z)$$

$$\underline{G}_{YV}(z) = \underline{B}(z) [\underline{N}(z) + \underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z)]^{-1} \underline{N}(z) \quad (5.1.3)$$

Die Polynommatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ müssen nun so bestimmt werden, daß der geschlossene Regelkreis das gewünschte Führungsverhalten

$$\underline{G}_{YV}(z) = \underline{B}(z) \underline{D}^{-1}(z) \quad (5.1.4)$$

erhält. Dies wird genau dann erreicht, wenn $\underline{P}(z)$ und $\underline{Q}(z)$ die unilaterale diophantische Gleichung

$$(\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = \underline{N}(z) \underline{D}(z) \quad (5.1.5)$$

erfüllen. In dieser Entwurfsgleichung für den P-Zustandsregler mit Beobachter sind folgende Polynommatrizen gegeben:

$\underline{B}(z)\underline{A}^{-1}(z)$: Regelstreckensystem als minimaler rechter Polynommatrizenquotient,

$\underline{N}(z)$: gewünschte charakteristische Polynommatrix des Beobachters und

$\underline{D}(z)$: gewünschte charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises mit $\text{grad}_{s_i} \underline{D}(z) = \text{grad}_{s_i} \underline{A}(z)$.

Setzt man die Synthesegleichung, Gl. (5.1.5), in Gl. (5.1.3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \underline{G}_{YV}(z) &= \underline{B}(z) (\underline{N}(z) \underline{D}(z))^{-1} \underline{N}(z) \\ &= \underline{B}(z) \underline{D}^{-1}(z) \underline{N}^{-1}(z) \underline{N}(z) \\ &= \underline{B}(z) \underline{D}^{-1}(z), \end{aligned}$$

d.h. die charakteristische Polynommatrix des Beobachters $\underline{N}(z)$ tritt entsprechend dem Separationsprinzip nicht mehr in der Führungsübertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises auf. Dies gilt natürlich nur so lange, wie in der Regelstrecke keine Störungen und Parameteränderungen auftreten. In den Störübertragungsfunktionen spielt die Dynamik des Beobachters weiterhin eine große Rolle.

Wahl der charakteristischen Polynommatrizen

Um sicherzustellen, daß die Reglerübertragungsmatrizen $\underline{N}^{-1}(z) \underline{P}(z)$ und $\underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z)$ proper, d.h. realisierbar, sind, müssen die Polynommatrizen in der unilateralen diophantischen Gleichung, Gl. (5.1.5), die Anforderungen

$$\text{grad}_{zi} \underline{Q}(z) \leq \text{grad}_{zi} \underline{N}(z) \quad (5.1.6.a)$$

$$\text{grad}_{zi} \underline{P}(z) \leq \text{grad}_{zi} \underline{N}(z) \quad (5.1.6.b)$$

erfüllen. Wie bereits in Abschnitt 3.3 erwähnt, kann man für Gl. (5.1.5), eine Lösung minimalen Grades finden, bei der für die Zeilen- und Spaltengrade von $\underline{Q}(z)$ die Beziehungen

$$\text{grad}_{si} \underline{Q}(z) = \text{grad}_{si} \underline{A}(z) - 1 \quad (5.1.7.a)$$

$$\text{grad}_{zi} \underline{Q}(z) \leq \max (\text{grad}_{si} \underline{Q}(z)) = \max (\text{grad}_{si} \underline{A}(z)) - 1$$

$$\text{grad}_{zi} \underline{Q}(z) \leq \max (\text{grad}_{ij} \underline{A}(z)) - 1 \quad (5.1.7.b)$$

gelten. In jeder Zeile von $\underline{Q}(z)$ kann also ein Element auftreten, dessen Polynomordnung um eins kleiner ist, als die maximale Polynomordnung der Nennermatrix $\underline{A}(z)$ der Regelstrecke. Aus den Gln. (5.1.6.a,7.b) folgt, daß man auf jeden Fall eine propere Übertragungsmatrix $\underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z)$ erhält, wenn die Zeilen der Nennerpolynommatrix des Beobachtersystems die Bedingung

$$\text{grad}_{zi} \underline{N}(z) \geq \max (\text{grad}_{ij} \underline{A}(z)) - 1 \quad (5.1.8)$$

erfüllen. Durch Wahl von $\underline{N}(z)$ gemäß Gl. (5.1.8) erhält man aus der Lösung der Gl. (5.1.5) auf jeden Fall realisierbare Übertragungsmatrizen. Allerdings ist Gl. (5.1.8) nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung. Wenn alle Spaltengrade von $\underline{A}(z)$ gleich sind und in Gl. (5.1.8) das Gleichheitszeichen gilt, dann spricht man von einem 'reduzierten' Beobachter, d.h. die minimale Ordnung des Beobachters ist gleich der Ordnung der Regelstrecke vermindert um die Anzahl der Ausgangsgrößen.

Wolovich hat in [W13] vorgeschlagen, mit

$$\mu = \max (\text{grad}_{ij} \underline{A}(z)) - 1 ,$$

$$\det \underline{N}(z) = z^{m(\mu-1)} + \beta_1(z) z^{(m-1)(\mu-1)} + \dots \beta_m(z) ,$$

$$\text{grad} \beta_i(z) < \mu - 1 ,$$

die charakteristische Polynommatrix der Beobachters

$$\underline{\underline{N}}(z) = \begin{bmatrix} B_1(z) - z^{\mu-1} & -1 & 0 & 0 \\ B_2(z) & z^{\mu-1} & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_m(z) & \cdot & \cdot & \cdot & z^{\mu-1} \end{bmatrix} \quad (5.1.9)$$

anzusetzen. Mit diesem Ansatz einer Begleitmatrix kann man zwar die Pole des Beobachtersystems durch $\det \underline{\underline{N}}(z)$ festlegen, kann jedoch darüber hinaus nach regelungstechnischen Gesichtspunkten keinen Einfluß auf das Eigensystem nehmen. Bei dieser Vorgehensweise ist auch kein Vorteil gegenüber der Vorgabe einer diagonalen Matrix $\underline{\underline{N}}(z)$ ersichtlich. Auf jeden Fall ist die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}^{-1}(z) \underline{\underline{Q}}(z)$ realisierbar. Soll die charakteristische Polynommatrix genutzt werden, um über die reine Polvorgabe hinaus, bei der nur n der nr Freiheitsgrade, die das Mehrgrößensystem bietet, festgelegt werden, dann empfiehlt es sich z.B. die Methodik nach [N1] zu verwenden. Damit kann man durch Orthogonalisierung des Eigensystems des geschlossenen Regelkreises das Mehrgrößensystem für eine vorgegebene Menge von Polen weitgehend unempfindlich gegenüber Parameteränderungen der Regelstrecke machen. Wendet man dieses Verfahren auf ein System in der Steuerungsform nach Anhang A1 an, erhält man, da keine Ähnlichkeitstransformation erforderlich ist, nach Berechnung der Zustandssystemmatrix des geschlossenen Regelkreises sofort die Polynomkoeffizienten der charakteristischen Polynommatrix $\underline{\underline{D}}(z)$ bzw. $\underline{\underline{N}}(z)$.

Zur Realisierung des Reglers

Wie man leicht nachprüfen kann, hat die Polynommatrix $\underline{\underline{P}}(z)$ in Gl. (5.1.5) die gleichen Zeilenordnungen wie die Beobachterdynamikmatrix $\underline{\underline{N}}(z)$. Die Reglerübertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}^{-1}(z) \underline{\underline{P}}(z)$ ist also realisierbar und beschreibt ein sprungfähiges System. Der Durchgriff führt zu einem Problem bei der Realisierung eines digitalen Reglers nach der Regelkreisstruktur in Bild 5.1.2, hier tritt eine verzögerungsfreie Schleife im Übertragungszweig von der Stellgröße über das System $\underline{\underline{N}}^{-1}(z) \underline{\underline{P}}(z)$ zurück zur Stellgröße auf. Das Problem kann durch die einfache algebraische Umformung

$$\underline{\underline{u}}(z) = \underline{\underline{v}}(z) - \underline{\underline{N}}^{-1}(z) \underline{\underline{P}}(z) \underline{\underline{u}}(z) - \underline{\underline{N}}^{-1}(z) \underline{\underline{Q}}(z) \underline{\underline{y}}(z) ,$$

$$(\underline{I} + \underline{N}^{-1}(z) \underline{P}(z)) \underline{u}(z) = \underline{v}(z) - \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{y}(z) ,$$

$$\underline{N}^{-1}(z) (\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) \underline{u}(z) = \underline{v}(z) - \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{y}(z) ,$$

womit sich schließlich für die Stellgröße

$$\underline{u}(z) = (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))^{-1} \underline{N}(z) (\underline{v}(z) - \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{y}(z)) \quad 5.1.10)$$

ergibt, behoben werden.

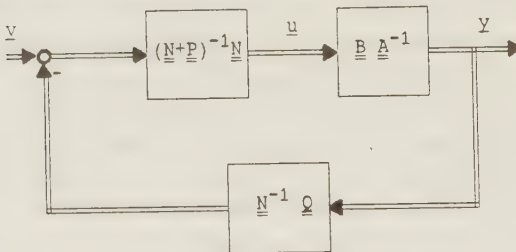


Bild 5.1.3. Regelkreisstruktur eines P-Zustandsreglers ohne verzögerungsfreie Schleife

Unter der Voraussetzung, daß die Regelstrecke $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$ nicht sprunghaft ist, tritt in dem Regelkreis nach Bild 5.1.3 keine verzögerungsfreie Schleife mehr auf. Außerdem hat diese Regelkreisstruktur den Vorteil, daß man die unbekannten Polynommatrizen $(\underline{N}(z) + \underline{P}(z))$ und $\underline{Q}(z)$ direkt als Lösung der Synthesegleichung, Gl. (5.1.5), berechnen kann.

Stationäre Genauigkeit

Mit dem bisherigen Entwurf wurde erreicht, daß der geschlossene Regelkreis die Führungsübertragungsmatrix $\underline{G}_{yv}(z) = \underline{B}(z) \underline{D}^{-1}(z)$ erhält. Damit keine bleibende Regelabweichung auftritt, muß die stationäre Verstärkung dieses Systems eine Einheitsmatrix sein. Dies ist jedoch oft nicht der Fall, z.B. wenn $\underline{D}(z)$ durch Spektralfaktorisierung nach Abschnitt 5.4 erzeugt wird. Um trotzdem zu erreichen, daß die Ausgangsgröße $\underline{y}$ dem Sollwert $\underline{w}$ ohne bleibende Regelabweichung folgt, muß der Sollwert über eine passende Matrix $\underline{K}$

auf den Regelkreis nach Gl. (5.1.4) aufgeschaltet werden. Mit dem so erweiterten System erhält man aus

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}_{YV}(z) \underline{K} \underline{W}(z)$$

für eine diskrete Beschreibungsform

$$\underline{G}_{YV}(z=1) \underline{K} = \underline{I} \quad (5.1.11.a)$$

und für ein kontinuierliches System

$$\underline{G}_{YV}(s=0) \underline{K} = \underline{I}. \quad (5.1.11.b)$$

als Bedingung für eine stationär genaue Entkopplung. Für Gl. (5.1.11a,b) existiert genau dann mindestens eine Lösung $\underline{K}$, wenn im System, Gl. (5.1.4), die Anzahl der Stellgrößen größer oder gleich der Anzahl der Ausgangsgrößen ist ($r \geq m$). Weiterhin darf das System keine Übertragungsnullstellen bei $z = 1$ bzw. $s = 0$ haben, es soll also kein 'differenzierendes Übertragungsverhalten' besitzen.

Modifikation des Beobachters

Bis jetzt wurde nur das Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises betrachtet. Bei gegebener Führungsübertragungsmatrix $\underline{B}(z)$ $\underline{D}^{-1}(z)$ wird das Störverhalten des Reglers entscheidend von den invarianten Nullstellen und der Struktur der charakteristischen Polynommatrix des Beobachters beeinflusst. Wenn man statt eines reduzierten Beobachters einen vollständigen Beobachter mit

$$\text{grad}_{zi} \underline{N}(z) = \max (\text{grad}_{ij} \underline{A}(z)) \quad (5.1.12)$$

wählt, dann erhält man einen zusätzlichen Freiheitsgrad, den man ausnutzen kann, um gezielt auf das Störverhalten des Regelsystems einzuwirken. Um zu zeigen, welchen Einfluß der Einsatz eines vollständigen Beobachters auf die Störübertragungsfunktion hat, soll zunächst die Übertragungsmatrix von der Ausgangsstörung $\underline{z}_Y(z)$ zur Stellgröße $\underline{u}(z)$ berechnet werden. Hierfür gilt

$$\underline{u}(z) = - (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))^{-1} \underline{N}(z) \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) [\underline{z}_Y(z) + \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z)]$$

$$[\underline{I} + (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))^{-1} \underline{Q}(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)] \underline{u}(z) = - (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))^{-1} \underline{Q}(z) \underline{z}_Y(z)$$

$$[(\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z)] \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z) = - \underline{Q}(z) \underline{z}_Y(z),$$

woraus man durch Einsetzen von Gl. (5.1.5)

$$\underline{N}(z) \underline{D}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z) = - \underline{Q}(z) \underline{z}_Y(z)$$

erhält, so daß für den Zusammenhang von Stellgröße und Ausgangsstörung

$$\underline{u}(z) = - \underline{A}(z) \underline{D}^{-1}(z) \underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z) \underline{z}_Y(z) . \quad (5.1.13)$$

folgt. Begründet durch Gl. (5.1.7.b) und Gl. (5.1.12) sind alle Zeilengrade von $\underline{Q}(z)$ kleiner als die Zeilengrade der Dynamikmatrix $\underline{N}(z)$ des vollständigen Beobachters, d.h. das System $\underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z)$ und damit auch das Übertragungssystem in Gl. (5.1.13) sind nicht sprunghaf. Ein Durchgriff ist jedoch erwünscht, denn dann kann der Regler im gleichen Abtastschritt auf eine Ausgangsstörung mit einer Stellgröße reagieren. Es liegt also nahe, mit Hilfe der allgemeinen Lösung für die unilaterale diophantische Gleichung, Gl. (5.1.5), nach Abschnitt 3.3 eine Polynommatrix $\underline{Q}'(z)$ zu berechnen, welche die gleichen Zeilengrade wie $\underline{N}(z)$ besitzt, um damit für Gl. (5.1.13) ein sprunghafes System erzeugen. Durch Ansatz von

$$\underline{Q}'(z) = \underline{Q}(z) - \underline{T} \underline{P}_1(z) \quad (5.1.14.a)$$

mit einer reellwertigen Matrix $\underline{T}$ und mit

$$(\underline{N}(z) + \underline{P}'(z)) = (\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) + \underline{T} \underline{Q}_1(z) \quad (5.1.14.b)$$

erhält man

$$\underline{u}(z) = - \underline{A}(z) \underline{D}^{-1}(z) \underline{N}^{-1}(z) (\underline{Q}(z) - \underline{T} \underline{P}_1(z)) \underline{z}_Y(z) . \quad (5.1.15)$$

Die frei wählbare Matrix $\underline{T}$ wird nun so berechnet, daß die Übertragungsmatrix in Gl. (5.1.15) eine vorgegebene konstante Durchgriffsmatrix $\underline{U}_{ZY}$ erhält. $\underline{U}_{ZY}$ gibt an, welche Stellgrößen nach einer sprunghaften Ausgangsstörung ausgegeben werden sollen. Nach Gl. (5.1.15) folgt mit den führenden Koeffizientenmatrizen

$$\underline{U}_{ZY} = - \underline{A}_{HSK} \underline{D}_{HSK}^{-1} \underline{N}_{HZK}^{-1} (\underline{Q} - \underline{T} \underline{P}_1)_{HZK}$$

bzw.

$$\underline{U}_{ZY} = \underline{A}_{HSK} \underline{D}_{HSK}^{-1} \underline{N}_{HZK}^{-1} \underline{T} \underline{A}_{1,HZK} ,$$

woraus sich

$$\underline{T} = \underline{N}_{\text{HZK}} \underline{D}_{\text{HSK}} \underline{A}_{\text{HSK}}^{-1} \underline{U}_{\text{zy}} \underline{A}_{1,\text{HZK}}^{-1} \quad (5.1.16)$$

ergibt.

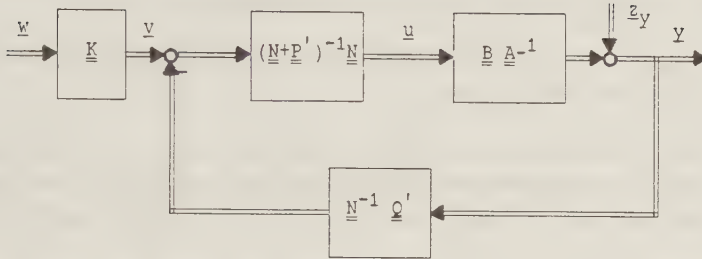


Bild 5.1.4. Blockschaltbild des vollständigen P-Zustandsreglers

Mit der Vorgabe von $\underline{U}_{\text{zy}}$ mittels Gl. (5.1.14,16) ist der Entwurf des P-Zustandsreglers im Frequenzbereich abgeschlossen. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Vorgabe von $\underline{U}_{\text{zy}}$ für Regelkreise mit vollständigem Beobachter die Führungsübertragungsfunktion $\underline{G}_{\text{yw}}(z)$ nicht verändert.

Mit einem proportionalen Zustandsregler kann im allgemeinen eine sprungförmige Führungsgröße nur dann stationär genau angeregt werden, wenn die Regelstreckenparameter genau bekannt sind, so daß das konstante Führungsgrößenfilter nach Gl. (5.1.11) ohne Fehler berechnet werden kann. Eine ähnliche Aussage gilt für das Ausregeln von Störsignalen. Daher muß das Regelkonzept erweitert werden, um allgemein einsetzbar zu sein.

5.2. Entwurf eines robusten Reglers für Führungs- und Störverhalten

Das Ziel einer Regelung ist es im allgemeinen nicht nur, dem geschlossenen Regelkreis eine gewünschte Führungsübertragungsmatrix zu geben, sondern ihn auch unempfindlich gegenüber Parameteränderungen der Regelstrecke sowie Störungen am Eingang und Ausgang der Regelstrecke zu machen. Der Regler soll in der Lage sein den Ausgangsvektor einem Referenzsignal, z.B. einem

Sprung oder einer Rampenfunktion, ohne bleibende Regelabweichung nachzuführen und deterministische Störungen asymptotisch auszuregeln. Die regelungstechnische Formulierung dieses Folgereglerproblems führt auf das sogenannte 'Prinzip des internen Modells', das in Abschnitt 5.2.1 erläutert werden soll.

In [D3, D4, B3] wird gezeigt, daß eine Lösung für das Folgeregelungsproblem genau dann existiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Die Regelstrecke hat keine instabilen, nicht steuerbaren Pole, sie muß also stabilisierbar sein.
- 2) Die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke, also die invarianten Nullstellen der Zählerpolynommatrix $\underline{B}(z)$, stimmen nicht mit den Polen der Laplace- bzw. z -Transformierten des Referenzsignales überein.
- 3) Die Anzahl der Stelleingänge ist größer oder gleich der Anzahl der Ausgänge, $r \geq m$.
- 4) Die Ausgänge y sind physikalisch meßbar.

Der Reglerentwurf kann sowohl mit Zustandsraummethoden als auch durch Lösung von Polynommatrizengleichungen erfolgen. Beide Vorgehensweisen werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

5.2.1 Das Prinzip des internen Modells

Aus der klassischen Regelungstechnik ist bekannt, daß der Regelkreis im Vorwärtzweig einen integralen Anteil enthalten muß, damit sprungförmige Ausgangsstörungen oder Sollwerte ausgeregelt werden können. Um rampenförmige Störungen ausregeln zu können, benötigt man einen doppelten I-Anteil. Diese Regeln lassen sich verallgemeinern: Angenommen ein Regelkreis wird durch eine sinusförmige Ausgangsstörung der Frequenz ω_0 angeregt. Um das Signal asymptotisch ausregeln zu können, muß der Vorwärtzweig Pole bei $\pm j\omega_0$ enthalten. Dann strebt die Verstärkung des Vorwärtzweiges bei dieser Frequenz gegen unendlich, so daß die Regelabweichung verschwindet. Im Vorwärtzweig werden Eigenbewegungen angeregt, die genau die Ausgangsstörung kompensieren bzw. dem Sollwert folgen.

Die folgenden Überlegungen sollen zeigen, welche Anforderungen ein Mehrgrößensystem in Polynommatrizendarstellung erfüllen muß, damit eine beliebige deterministische Ausgangsstörung asymptotisch ausgeregelt werden kann.

Die z-Transformierte der Ausgangsstörung sei durch den linken Polynommatrizenquotienten

$$\underline{z}_Y(z) = \underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z) \quad (5.2.1.1)$$

gegeben. Die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises nach Bild 5.2.2.1 lautet

$$\underline{G}_0(z) = \underline{A}_0^{-1}(z) \underline{B}_0(z). \quad (5.2.1.2)$$

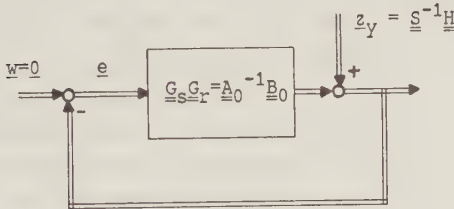


Bild 5.2.1.1 Regelkreis mit deterministischer Ausgangsstörung

Mit diesen Definitionen ergibt sich für die Regelabweichung

$$\underline{e}(z) = -(\underline{A}_0(z) + \underline{B}_0(z))^{-1} \underline{A}_0(z) \underline{z}_Y(z). \quad (5.2.1.3)$$

Den stationären Endwert der Regelabweichung für eine Störung nach Gl. (5.2.1.1) kann man durch Anwendung des Grenzwertsatzes der z- bzw. Laplace-Transformation auf Gl. (5.2.1.3) berechnen. Für diskrete Systeme gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \underline{e}(z) & (5.2.1.4a) \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (\underline{A}_0(z) + \underline{B}_0(z))^{-1} \underline{A}_0(z) \underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z) \end{aligned}$$

und im kontinuierlichen Fall erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \underline{e}(s) & (5.2.1.4b) \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} s (\underline{A}_0(s) + \underline{B}_0(s))^{-1} \underline{A}_0(s) \underline{S}^{-1}(s) \underline{H}(s). \end{aligned}$$

Damit der Grenzwert in Gl. (5.2.1.4) überhaupt existiert, muß die Laplace- bzw. z-transformierte Übertragungsmatrix des Regelfehlersystems für $\underline{e}(z)$ bzw. $\underline{e}(s)$ stabil sein. Während man die charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises $(\underline{A}_0 + \underline{B}_0)$ stabil vorgeben kann, ist $\underline{S}$ normalerweise grenz- oder instabil, andernfalls würde die Störung selbständig abklingen. Durch Wahl von

$$\underline{A}_0(z) = \underline{A}'_0(z) \underline{S}(z), \quad (5.2.1.5)$$

kann man sicherstellen, daß der Grenzwert in Gl. (5.2.1.4a,b) existiert und daß die Regelabweichung für $k \rightarrow \infty$ bzw. $t \rightarrow \infty$ verschwindet, denn $(\underline{A}_0 + \underline{B}_0)$ enthält keine Polstelle bei $z = 1$ oder $s = 0$. Also folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}(k) = - \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (\underline{A}_0(z) + \underline{B}_0(z))^{-1} \underline{A}'_0(z) \underline{H}(z) = \underline{0} \quad (5.2.1.6a)$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = - \lim_{s \rightarrow 0} s (\underline{A}_0(s) + \underline{B}_0(s))^{-1} \underline{A}'_0(s) \underline{H}(s) = \underline{0}. \quad (5.2.1.6b)$$

Laut Gl. (5.2.1.5) können Ausgangsstörungen genau dann asymptotisch ausgeglichen werden, wenn die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises im Ausgang die charakteristische Polynommatrix des Störmodells $\underline{S}(z)$ enthält. Man spricht davon, daß der offene Regelkreis ein 'internes Modell' [D3, B3] der Störung enthalten muß. Durch eine geeignete Wahl des Reglersystems $\underline{G}_r(z)$ muß man also sicherstellen, daß gilt

$$\underline{G}_0(z) = \underline{G}_s(z) \underline{G}_r(z) = \underline{S}^{-1}(z) \underline{G}'_0(z). \quad (5.2.1.7)$$

Bengtsson [B3] hat angegeben, wie $\underline{G}_r(z)$ beschaffen sein muß, damit Gl. (5.2.1.7) erfüllt wird. Der Regler nach [B3] hat jedoch wegen der Nichtkommutativität des Matrizenproduktes in Gl. (5.2.1.7) für ein beliebiges $\underline{S}(z)$ eine relativ komplizierte Struktur. In der Praxis können aber wesentliche Vereinfachungen vorgenommen werden, denn die charakteristische Polynommatrix des Störmodells $\underline{S}(z)$ hat fast stets Diagonalstruktur. Weiterhin sind in der Regel alle Diagonalelemente von $\underline{S}(z)$ gleich. Wenn z.B. an einem Regelstreckenausgang eine sprunghafte Störung auftritt, dann hat diese wegen der Kopplungen in der Regelstrecke Rückwirkungen auf alle anderen Ausgänge, so daß in jedem Ausgang eine sprunghafte Störung angenommen

werden muß. Die charakteristische Polynommatrix des Störmodells hat dann die Form

$$\underline{S}(z) = s(z) \underline{I}_r. \quad (5.2.1.8)$$

Für den Sonderfall, Gl. (5.2.1.8), kann man Gl. (5.2.1.7) sehr leicht durch Wahl von

$$\underline{G}_r(z) = \underline{S}^{-1}(z) \underline{G}'_r(z) \quad (5.2.1.9)$$

erfüllen, womit sich für die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises zu

$$\underline{G}_0(z) = \underline{G}_S(z) \underline{S}^{-1}(z) \underline{G}'_r(z) = \underline{S}^{-1}(z) \underline{G}_S(z) \underline{G}'_r(z) = \underline{S}^{-1}(z) \underline{G}'_0(z)$$

ergibt. Der Regelstrecke wird also, wie in Bild 5.2.1.2, die charakteristische Polynommatrix des Störmodells vorgeschaltet und anschließend wird $\underline{G}'_r(z)$ so bestimmt, daß der geschlossene Regelkreis stabil ist.

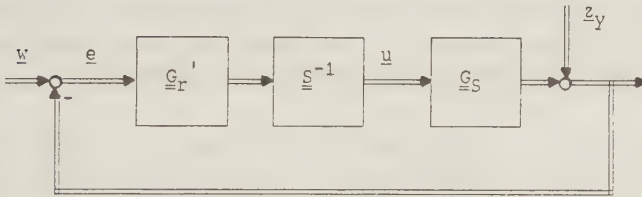


Bild 5.2.1.2 Regelkreis mit vorgeschaltetem Störmodell

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich nur auf Ausgangsstörungen. Allgemein kann man sagen, daß Störungen immer dann asymptotisch ausgeglichen werden, wenn der Regelkreis vor dem Eingriffspunkt der Störung ein internes Modell der Störung enthält. Wegen der speziellen Struktur von Gl. (5.2.1.8) kann das Störmodell im Regelkreis, Bild 5.2.1.2, beliebig verschoben werden. Deshalb ist der Regler nach Gl. (5.2.1.9) in der Lage, ein Signal, dessen erzeugendes System das r -fache charakteristische Polynom $s(z)$ besitzt, asymptotisch auszuregulieren, ohne Rücksicht darauf ob es auf den Regelkreis als Ausgangsstörung z_y , Eingangsstörung z_u oder Sollwert w einwirkt. Dies gilt auch noch bei beliebigen Parameterfehlern im Regelstreckenmodell, solange der geschlossene Regelkreis stabil bleibt.

Davison [D3] hat das hier besprochene Folgeregelungsproblem mit Zustandsraummethoden formuliert. Im Abschnitt 5.2.2 wird zunächst der Entwurf dieses Zustandsreglers kurz diskutiert. In Abschnitt 5.2.3 wird auf den Entwurf eines Polynommatrizenreglers nach dem Prinzip des internen Modells eingegangen, wobei insbesondere eine Reduzierung der durch das erweiterte System verursachten Erhöhung der Reglerordnung angestrebt wird.

5.2.2. Entwurf des Folgereglers im Zustandsraum

Der Entwurf eines Folgereglers erfolgt im allgemeinen in zwei Schritten. Zuerst wird die Regelstrecke durch ein vorgeschaltetes System so erweitert, daß der Vorwärtspfad der Regelung ein internes Modell des vorgegebenen Referenzsignales enthält. Dieses Vorschaltssystem wird von Davison als "Servokompensator" bezeichnet [D4]. Dann wird für das erweiterte System ein Regler entworfen, der den geschlossenen Regelkreis stabilisiert. Um im folgenden insbesondere die Darstellung der Signale im Frequenzbereich einfach zu halten, wird in diesem Abschnitt die kontinuierliche Beschreibungsform gewählt. Die Regelstrecke wird dann durch die Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{E} \underline{z}(t) \quad (5.2.2.1.a)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) + \underline{F} \underline{z}(t) \quad (5.2.2.1.b)$$

beschrieben. Die Störung $\underline{z}(t)$ und das Führungssignal $\underline{w}(t)$ sollen einer Klasse von Referenzsignalen angehören, die durch die homogenen Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{x}}_z(t) = \underline{A}_z \underline{x}_z(t) , \quad \underline{x}_z(0) = \underline{x}_{z0} \quad (5.2.2.2.a)$$

$$\underline{z}(t) = \underline{C}_z \underline{x}_z(t) \quad (5.2.2.2.b)$$

$$\dot{\underline{x}}_w(t) = \underline{A}_w \underline{x}_w(t) , \quad \underline{x}_w(0) = \underline{x}_{w0} \quad (5.2.2.3.a)$$

$$\underline{w}(t) = \underline{C}_w \underline{x}_w(t) \quad (5.2.2.3.b)$$

dargestellt werden können. Die Gln. (5.2.2.2,3) umfassen eine allgemeine Klasse von deterministischen Referenzsignalen. In Tabelle 5.2.2.1 sind ei-

nige Beispiele hierfür angegeben. Selbstverständlich können auch Linearkombinationen der Einzelsignale auftreten.

Signal $z(t \geq 0)$	$\underline{A}_z$	$\underline{C}_z$	$\underline{x}_z(0)$	char. Polynom
Sprung $z(t) = a$	[0]	[1]	a	s
Rampe $z(t) = a t$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	[1 0]	$[0 \ a]^T$	s^2
Sinus $z(t) = a \sin \omega t$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$	[1 0]	$[0 \ a]^T$	$s^2 + \omega^2$

Tab. 5.2.2.1 Zustandsraumdarstellungen von Referenzsignalen

Im nächsten Schritt muß nun das charakteristische Polynom $p_s(s)$ des Referenzsignales bestimmt werden, für das der Regler ausgelegt werden soll. Offenbar ist $p_s(s)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der charakteristischen Polynome von Gl. (5.2.2.2,3). Damit ergibt sich mit den Polen s_i das charakteristische Polynom

$$p_s(s) = \prod_{i=1}^{n_p} (s - s_i) . \quad (5.2.2.4)$$

Mit $p_s(s)$ kann man die Systemmatrix des Folgereglers mit der Zustands-systemmatrix $\underline{A}_s$ bestimmen. Diese Matrix entspricht genau der Systemmatrix des Stormodells, Gl. (5.2.2.a). Sie kann über den Ansatz in Block-Frobenius-Form realisiert werden. Die Eingangsmatrix $\underline{B}_s$ des Folgereglers kann im Prinzip beliebig gewählt werden, wenn die Bedingung, $(\underline{A}_s, \underline{B}_s)$ steuerbar, erfüllt bleibt. Die Zustandsraumdarstellung des Folgereglers lautet also mit der Regelabweichung als Eingangsgröße

$$\dot{\underline{x}}_s(t) = \underline{A}_s \underline{x}_s(t) + \underline{B}_s \underline{e}(t) . \quad (5.2.2.5)$$

Der nächste Schritt des Reglerentwurfs besteht darin, den geschlossenen Regelkreis durch eine Zustandsrückführung

$$\underline{u}(t) = \underline{K} \hat{\underline{x}}(t) + \underline{K}_S \underline{x}_S(t) \quad (5.2.2.6)$$

mit dem Beobachter

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A} \hat{\underline{x}}(t) + \underline{B} \underline{u} + \underline{H} (\underline{y}(t) - \hat{\underline{y}}(t)) \quad (5.2.2.7.a)$$

$$\hat{\underline{y}}(t) = \underline{C} \hat{\underline{x}}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \quad (5.2.2.7.b)$$

zu stabilisieren. Der Entwurf des Zustandsreglers kann mit Standardmethoden, z.B. durch Polvorgabe oder quadratisch optimalen Entwurf, für die um den Folgeregler erweiterte Regelstrecke

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{x}}_S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{B}_S \underline{C} & \underline{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_S(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{B}_S \underline{D} \end{bmatrix} \underline{u}(t) \quad (5.2.2.8.a)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_S(t) \end{bmatrix} + \underline{D} \underline{u}(t) \quad (5.2.2.8.b)$$

durchgeführt werden. Der Beobachter kann bezüglich der Pole entsprechend dem Separationsprinzip getrennt entworfen werden.

5.2.3. Entwurf eines robusten Folgereglers im Frequenzbereich

Der im vorangehenden Abschnitt vorgestellte erweiterte Zustandsregler ist in der Lage, eine bestimmte Klasse von Referenzsignalen asymptotisch auszuregulieren. Dies gilt auch dann noch, wenn Parameteränderungen in der Regelstrecke auftreten oder wenn das Modell der Regelstrecke ungenau bekannt ist, denn das vorgeschaltete Kompensatorsystem bleibt konstant. In diesem Sinne ist die Bezeichnung "robust" zu verstehen.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie der Entwurf des robusten Folgereglers auf Polynommatrizenbeschreibungen übertragen werden kann. Dadurch ergeben sich einige Vereinfachungen, denn man braucht nicht erst aus dem charakteristischen Polynom $p_S(z)$ des Referenzsignals die Zustandsraumdarstellung des vorgeschalteten Kompensators $[\underline{A}_S, \underline{B}_S]$ und die erweiterte Re-

gelstrecke, analog zu Gl. (5.2.2.8), zu berechnen. Stattdessen kann man den Entwurf direkt mit der charakteristischen Polynommatrix des Störmodells $\underline{S}(z)$ und dem Regelstreckenmodell $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$ durchführen, ohne eine erweiterte Systemdarstellung berechnen zu müssen. Diese Vorgehensweise hat gegenüber den Zustandsraumverfahren den wichtigen numerischen Vorteil, daß sich die Polynomordnungen in den Entwurfsgleichungen nicht erhöhen.

Der erweiterte Regelkreis mit Störmodell

Der erste Schritt des Entwurfsverfahrens besteht wiederum darin, mit dem vorgegebenen Referenzsignal die charakteristische Polynommatrix des Störmodells gemäß Gl. (5.2.1.8) aufzustellen. Diese Diagonalphynommatrix wird dann der Regelstrecke gemäß Bild 5.2.3.1 vorgeschaltet, um im Vorwärtspfad ein internes Modell der Störung zu erzeugen.

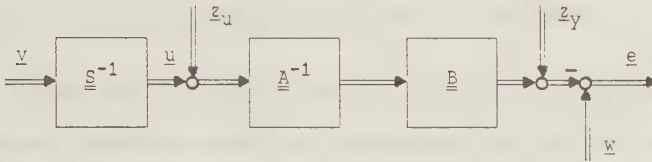


Bild 5.2.3.1 Regelstrecke mit vorgeschaltetem Störmodell

Für die Regelstrecke mit vorgeschaltetem Störmodell $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{S}^{-1}(z)$ muß nun ein Regler entworfen werden, der den geschlossenen Regelkreis stabilisiert. Es stehen 2 Eingriffsmöglichkeiten für die Regelung des Systems in Bild 5.2.3.1 zur Verfügung: Der Stellvektor $\underline{u}$ und der Eingangsvektor des Störmodells $\underline{y}$. Durch einen unterlagerten P-Zustandsregler mit Beobachter, dessen Entwurf in Abschnitt 5.1 vorgestellt wurde, kann man dem inneren Regelkreis eine beliebige charakteristische Polynommatrix $\underline{D}(z)$ geben. Um auch die Pole des Störmodells $\underline{S}(z)$ im geschlossenen Regelkreis stabilisieren zu können, wird noch ein zusätzlicher Freiheitsgrad benötigt. Diesen erhält man dadurch, daß die Zählerpolynommatrix $\underline{H}(z)$ des Störmodells noch frei wählbar ist. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Regelkreisstruktur des Bildes 5.2.3.2, die zu der Struktur des erweiterten Zustandsreglers nach Abschnitt 5.2.2 äquivalent ist.

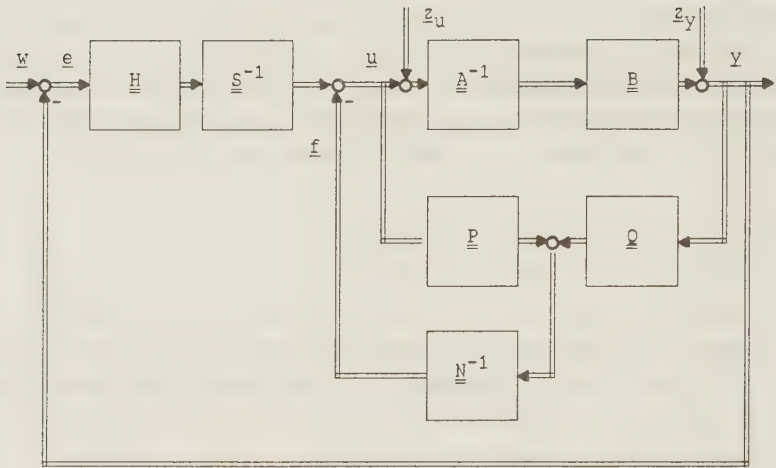


Bild 5.2.3.2 Blockschaltbild des Reglers für Führungs- und Störverhalten

Für den Entwurf des Folgereglers sind folgende Polynommatrizen gegeben:

$\underline{\underline{B}}(z) \underline{\underline{A}}^{-1}(z)$: Modell der Regelstrecke als minimaler rechter Polynommatrixquotient

$\underline{\underline{S}}(z)$: charakteristische Polynommatrix des Störmodells

$\underline{\underline{N}}(z)$: gewünschte charakteristische Polynommatrix des Beobachters

$\underline{\underline{E}}(z)$: gewünschte charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises

Gesucht wird eine Entwurfsgleichung für die unbekannten Polynommatrizen $\underline{\underline{H}}(z)$, $\underline{\underline{P}}(z)$ und $\underline{\underline{Q}}(z)$, mit der man dem geschlossenen Regelkreis in Bild 5.2.3.2 die charakteristische Polynommatrix $\underline{\underline{E}}(z)$ vorgeben kann. Dazu soll zunächst das Führungsübertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises berechnet werden. Hierfür gilt, wobei aus Gründen der übersichtliche Darstellung das Argument "z" weggelassen wurde,

$$\underline{u} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{H}} (\underline{w} - \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{u}) - \underline{\underline{N}}^{-1} (\underline{\underline{P}} \underline{u} + \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{u})$$

$$(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{N}}^{-1} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{N}}^{-1} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1}) \underline{u} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{w}$$

$$(\underline{S} \underline{A} + \underline{S} \underline{N}^{-1} \underline{P} \underline{A} + \underline{S} \underline{N}^{-1} \underline{Q} \underline{B} + \underline{H} \underline{B}) \underline{A}^{-1} \underline{u} = \underline{H} \underline{w}$$

$$(\underline{S} \underline{N}^{-1} (\underline{N} \underline{A} + \underline{P} \underline{A} + \underline{Q} \underline{B}) + \underline{H} \underline{B}) \underline{A}^{-1} \underline{u} = \underline{H} \underline{w} . \quad (5.2.3.1)$$

Nach Abschnitt 5.1 ist aber gerade

$$(\underline{N}(z) \underline{A}(z) + \underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z)) = \underline{N}(z) \underline{D}(z)$$

die Entwurfsgleichung für den inneren P-Zustandsregler mit Beobachter. Mit dieser Gleichung wird dem unterlagerten Regelkreis die Führungsübertragungsfunktion $\underline{B}(z) \underline{D}^{-1}(z)$ zugewiesen. Damit ergibt sich schließlich mit

$$(\underline{S}(z) \underline{D}(z) + \underline{H}(z) \underline{B}(z)) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z) = \underline{H}(z) \underline{w}(z)$$

$$\underline{u}(z) = \underline{A}(z) (\underline{S}(z) \underline{D}(z) + \underline{H}(z) \underline{B}(z))^{-1} \underline{H}(z) \underline{w}(z)$$

$$\underline{y}(z) = \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{u}(z)$$

die gesuchte Übertragungsmatrix zu

$$\underline{G}_{yw}(z) = \underline{B}(z) (\underline{S}(z) \underline{D}(z) + \underline{H}(z) \underline{B}(z))^{-1} \underline{H}(z) = \underline{B}(z) \underline{E}^{-1}(z) \underline{H}(z) . \quad (5.2.3.2)$$

Um dem geschlossenen Regelkreis die gewünschte charakteristische Polynommatrix $\underline{E}(z)$ vorgeben zu können, müssen also die beiden diophantischen Gleichungen

$$\underline{S}(z) \underline{D}(z) + \underline{H}(z) \underline{B}(z) = \underline{E}(z) \quad (5.2.3.3)$$

$$(\underline{N}(z) + \underline{P}(z)) \underline{A}(z) + \underline{Q}(z) \underline{B}(z) = \underline{N} \underline{D} \quad (5.2.3.4)$$

gelöst werden. Aus der bilateralen diophantischen Gleichung, Gl. (5.2.3.3), wird zunächst die Aufschaltmatrix $\underline{H}(z)$ für das Störmodell und die charakteristische Polynommatrix $\underline{D}(z)$ des unterlagerten Regelkreises berechnet. Anschließend ist die unilaterale diophantische Gleichung, Gl. (5.2.3.4), für den Entwurf des unterlagerten P-Zustandsreglers mit Beobachter zu lösen.

Für die numerische Genauigkeit eines Reglerentwurfs ist es wichtig, mit möglichst niedriger Zustandsraumordnung für den Entwurf im Zeitbereich bzw. mit möglichst geringer Polynomordnung bei einer Synthese im Frequenzbereich zu arbeiten. Das oben angegebene Entwurfsverfahren hat gegenüber anderen Verfahren den Vorteil, daß die Polynomordnung aller beteiligten Polynom-

matrizen minimal ist, d.h. man braucht nicht erst eine um das Störmodell erweiterte Systemdarstellung zu berechnen. Das folgende Beispiel gibt einen Überblick darüber, wie die Polynomordnungen der einzelnen Polynommatrizen in den Gln. (5.2.3.3,4) festzulegen sind. Weiterhin soll erläutert werden, daß mit dem hier gewählten Ansatz die Ordnung der zu implementierenden Reglersystemmatrizen und die Dimension des Entwurfsproblems im Vergleich zu Abschnitt 5.2.2 erheblich reduziert werden kann.

Beispiel 5.2.3.1

Gegeben sei eine nicht sprungfähige Regelstrecke mit zwei Ein- und Ausgängen als minimaler rechter Polynommatrixquotient mit den Spaltengraden $\text{grad}_{\text{Si}} \underline{A}(z) = \{3, 2\}$. Für diese Regelstrecke soll nun ein Regler entworfen werden, der sprungförmige und sinusförmige Störungen ausregelt. Für die Ordnungen der Elemente der Polynommatrizen gilt dann

$$[\text{grad}_{\text{ij}} \underline{A}(z)] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\text{grad}_{\text{ij}} \underline{B}(z)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\text{grad}_{\text{ij}} \underline{S}(z)] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Um den Zustandsvektor der Regelstrecke zu bestimmen, wird ein vollständiger Beobachter in Form eines minimalen linken Polynommatrixquotienten eingesetzt, dessen Zeilengrade gleich den Spaltengraden der Regelstrecke sind. Dann gilt für die charakteristische Polynommatrix des Beobachters

$$\text{grad}_{\text{zi}} \underline{N}(z) = \text{grad}_{\text{Si}} \underline{A}(z), \quad [\text{grad}_{\text{ij}} \underline{N}(z)] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Polynomordnungen der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises müssen so gewählt werden, daß die Spaltengrade der Polynommatrix $\underline{D}(z)$ in Gl. (5.2.2.3) gleich den Spaltengraden der Regelstrecke sind, d.h.

$$\text{grad}_{\text{ij}} \underline{E}(z) = \text{grad}_{\text{zi}} \underline{S}(z) + \text{grad}_{\text{Sj}} \underline{A}(z), \quad [\text{grad}_{\text{ij}} \underline{E}(z)] = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Für die bilaterale diophantische Gleichung, Gl. (5.2.3.3) wird eine Lösung minimalen Grades in Bezug auf $\underline{H}(z)$ berechnet. Man erhält

$$\text{grad}_{si} \underline{H}(z) = \text{grad}_{zi} \underline{S}(z) - 1$$

$$[\text{grad}_{ij} \underline{H}(z)] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\text{grad}_{ij} \underline{D}(z)] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Auch für die unilaterale diophantische Gleichung, Gl. (5.2.3.4) wird eine Lösung minimalen Grades, diesmal in Bezug auf $\underline{Q}(z)$ berechnet. Hier gilt

$$\text{grad}_{si} \underline{Q}(z) = \text{grad}_{si} \underline{A}(z) - 1$$

$$[\text{grad}_{ij} \underline{Q}(z)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\text{grad}_{ij} \underline{P}(z)] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Ordnungen der einzelnen Polynommatrizen sind so festgelegt, daß die Reglerteilsysteme $\underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z)$, $\underline{N}^{-1}(z) \underline{P}(z)$ und $\underline{N}^{-1}(z) \underline{Q}(z)$ proper sind, der Regler ist also realisierbar. Abgesehen von $\underline{E}(z)$ hat keine der Polynommatrizen in Gl. (5.2.3.3,4) eine höhere Polynomordnung als in $\underline{A}(z)$ bzw. $\underline{S}(z)$ vorhanden. Würde man den Regler im Zustandsraum entwerfen, dann wäre die Ordnung des erweiterten Systems, analog zu Gl. (5.2.2.8), mehr als doppelt so groß wie die Ordnung der Regelstrecke.

Modifikation des Reglers durch FührungsgröBenaufschaltung

In der bisherigen Regelkreisstruktur nach Bild 5.2.3.2 muß ein Sollwertsignal w zunächst über das System $\underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z)$ geführt werden, bevor es die Ausgabe einer Stellgröße an die Regelstrecke bewirkt. Beispiel 5.2.3.2 hat jedoch gezeigt, daß die Zeilengrade der Polynommatrix $\underline{H}(z)$ um eins kleiner sind, als die Zeilengrade der Nennermatrix des Störsystems $\underline{S}(z)$, d.h. das System $\underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z)$ besitzt keinen Durchgriff. Eine Sollwertänderung bewirkt also erst mit einer Verzögerung von einem Abtastschritt eine Stellgrößenänderung.

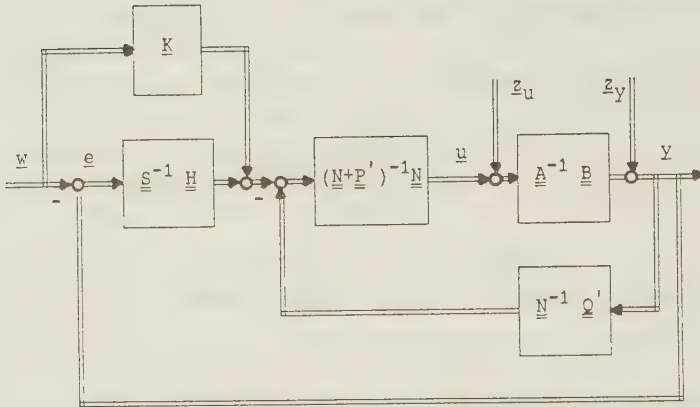


Bild 5.2.3.3 Blockschaltbild des Reglers für Führungs- und Störverhalten mit Aufschaltung der Führungsgröße

Dieser Nachteil kann vermieden werden, wenn man das System $\underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z)$ mit einer Aufschaltmatrix $\underline{K}$ gemäß Bild 5.2.3.3 umgeht. Die erste Stellgröße nach einer Sollwertänderung um $\underline{w}_0$ lautet dann

$$\underline{u}_0 = (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))_{\text{HZK}}^{-1} \underline{N}_{\text{HZK}} \underline{K} \underline{w}_0.$$

$\underline{K}$ wird nun so berechnet, daß die Stellgröße für einen Einheitssprung als Sollwert einen vorgegebenen Wert $\underline{u}_w$ annimmt. Mit

$$\underline{u}_w = (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))_{\text{HZK}}^{-1} \underline{N}_{\text{HZK}} \underline{K}$$

erhält man

$$\underline{K} = \underline{N}_{\text{HZK}}^{-1} (\underline{N}(z) + \underline{P}(z))_{\text{HZK}} \underline{u}_w. \quad (5.2.3.5)$$

Wie beim P-Zustandsregler kann man auch beim Folgeregler die erste Stellgröße nach einer Ausgangsstörung frei vorgeben, wenn ein vollständiger Beobachter eingesetzt wird. Da der unterlagerte P-Zustandsregler genauso entworfen wird wie in Abschnitt 5.1, soll hier nicht noch einmal darauf eingegangen werden. Zur Vorgabe von $\underline{u}_{zy}$ können Gl. (5.1.14,16) unverändert über-

nommen werden, da das System $\underline{S}^{-1}(z) \underline{H}(z)$ auf jeden Fall nicht sprungfähig ist.

Der hier vorgestellte Polynommatrizenregler entspricht dem von Davison in [D4] vorgeschlagenen 'robusten Servokompensator' nach Abschnitt 5.2.2. Der Entwurf dieses Polynommatrizenreglers bietet mehrere Vorteile:

- Für die vorgegebene Klasse von Referenzsignalen (Sprung, Rampe, Sinus, ..) tritt keine bleibende Regelabweichung auf. Dies gilt auch für beliebige Parameteränderungen in der Regelstrecke, solange der geschlossene Regelkreis stabil bleibt.
- Die Elemente aller auftretenden Polynommatrizen haben minimale Polynomordnungen.
- Es braucht keine um das Störmodell erweiterte Systemdarstellung berechnet zu werden, sondern der Entwurf erfolgt direkt mit der charakteristischen Polynommatrix des Störmodells $\underline{S}(z)$ und dem Regelstreckenmodell $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$.
- Die charakteristische Polynommatrix des Störmodells $\underline{S}(z)$ kann sehr leicht berechnet werden.
- Der Anfangswert der Stellgröße nach einem Sollwertsprung kann frei vorgegeben werden.
- Auch für Ausgangsstörungen kann der Anfangswert der Stellgröße frei vorgegeben werden, wenn man einen vollständigen Beobachter einsetzt.

Dieses Konzept kann auch für dynamisch entkoppelnde Regler verwendet werden, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

5.3 Entwurf eines dynamisch entkoppelnden Reglers

Bei manchen regelungstechnischen Anwendungen wird gewünscht, daß die Ausgangsgrößen im geschlossenen Regelkreis nicht nur stationär voneinander entkoppelt sind. Eine Sollwertänderung soll nur den zugehörigen Ausgang beeinflussen, alle anderen Ausgangsgrößen sollen möglichst nicht beeinflusst werden. In [J1] wurde ein einfaches aber wirkungsvolles Verfahren zur Ent-

kopplung vorgeschlagen, das im folgenden in etwas abgewandelter Form beschrieben werden soll. Dieses Verfahren ist dann anwendbar, wenn

- 1) die Regelstrecke ebenso viele Stellgrößen wie Ausgangsgrößen besitzt und
- 2) ein Modell der Regelstrecke als minimaler linker Polynommatrixquotient $\underline{A}_1^{-1}(z)\underline{B}_1(z)$ mit diagonalen Nennerpolynommatrix $\underline{A}_1(z)$ vorliegt.*)

Dann hat die Zerlegung der Übertragungsmatrix die Struktur

$$\underline{G}_S(z) = \text{diag}(a_{11}(z))^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix} . \quad (5.3.1)$$

Der Regelstrecke, Gl. (5.3.1), wird nun ein Entkopplungsnetzwerk vorgeschaltet, das die Stellgrößen des Reglers so filtert, daß die Verkopplungen durch die Nicht-Diagonalelemente von $\underline{B}_1(z)$ aufgehoben werden. Dieses Entkopplungsnetzwerk beruht auf der einfachen Polynommatrizenidentität

$$\underline{B}_1(z) \text{adj } \underline{B}_1(z) = \underline{I} \det \underline{B}_1(z) . \quad (5.3.2)$$

mit der adjungierten Polynommatrix von $\underline{B}_1(z)$

$$\text{adj } \underline{B}_1(z) = [\tilde{b}_{ij}(z)] ,$$

die man durch die Bestimmung der Streichungsdeterminanten (r-1)-ter Ordnung der Polynommatrix $\underline{B}_1(z)$ erhält.

Man kann also eine dynamische Entkopplung erreichen, indem man der Regelstrecke einen rechten Polynommatrixquotienten mit der Zählerpolynommatrix

*) Meist ist es kein Problem, eine solche Systemdarstellung mit diagonalen Nennerpolynommatrix zu finden. Man kann z.B. die Zeilenhauptnenner der Einzelübertragungsfunktionen bilden oder ein Identifikationsverfahren mit einem Teilmodellansatz auf die Meßsignale der Regelstrecke anwenden.

$\text{adj } \underline{\underline{B}}_1(z)$ und einer beliebigen diagonalen Nennerpolynommatrix $\underline{\underline{S}}(z)$ vorgeschaltet und den Regler für die so erweiterte Regelstrecke entwirft.



Bild 5.3.1 Regelstrecke mit vorgeschaltetem Entkopplungsnetzwerk

Die Ordnungen der Diagonalelemente von $\underline{\underline{S}}(z)$ müssen so gewählt werden, daß das Entkopplungsnetzwerk realisierbar ist, dann gilt

$$\text{grad } s_{ii}(z) = \text{grad}_{s_i} (\text{adj } \underline{\underline{B}}_1(z)) . \quad (5.3.3)$$

Die Übertragungsmatrix der um das Entkopplungsnetzwerk erweiterten Regelstrecke lautet

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}'_S(z) &= \underline{\underline{A}}_1^{-1}(z) \underline{\underline{B}}_1(z) \text{adj } \underline{\underline{B}}_1(z) \underline{\underline{S}}^{-1} \\ &= \text{diag } (a_{ii}(z))^{-1} \text{diag } (\det \underline{\underline{B}}_1(z)) \text{diag } (s_{ii}(z))^{-1} \\ &= \text{diag } (\det \underline{\underline{B}}_1(z)) \text{diag } (a_{ii}(z))^{-1} \text{diag } (s_{ii}(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Das kann abgekürzt als rechter Polynommatrixquotient

$$\underline{\underline{G}}'_S(z) = \underline{\underline{B}}'(z) \underline{\underline{A}}'^{-1}(z) \quad (5.3.4)$$

mit

$$\underline{\underline{B}}'(z) = \text{diag } (\det \underline{\underline{B}}(z) , i = 1 \dots r)$$

$$\underline{\underline{A}}'(z) = \text{diag } (a_{ii}(z) p_{ii}(z) , i = 1 \dots r)$$

geschrieben werden. Die Stabilisierung der erweiterten Regelstrecke $\underline{\underline{B}}'(z) \underline{\underline{A}}'^{-1}(z)$ mit den entkoppelten Einzelübertragungsfunktionen

$$y_i(z) = \frac{\det \underline{B}_1(z)}{s_{ii}(z) a_{ii}(z)} u_i(z), \quad i=1, \dots, r \quad (5.3.5)$$

kann mit einem beliebigen bekannten Entwurfsverfahren für Eingrößenregelstrecken erfolgen. Die Pole von $s_{ii}(z)$ sollten so gewählt werden, daß $s_{ii}(z)$ ein internes Modell der Störungen enthält, die auf den Ausgang i einwirken. Wenn also z.B. sprungformige Störsignale ausgeregelt werden sollen, dann sollte $s_{ii}(z)$ einen Pol $z = 1$ enthalten. Die restlichen Pole, die aufgrund von Gl. (5.3.3) nötig sind, werden in den Ursprung der z -Ebene nach $z=0$ gelegt.

Beispiel 5.3.1

Für die nicht sprungfähige (2×2) -Regelstrecke mit der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}_{uy}(z) = \underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}_1(z) = \begin{bmatrix} (z-0.5)^3 & 0 \\ 0 & (z-0.3)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z^2+2z+3 & 4z^2+5z+6 \\ 7z+8 & 9z+10 \end{bmatrix}$$

soll ein entkoppelnder PI-Zustandsregler entworfen werden. Die adjungierte Polynommatrix von $\underline{Q}_1(z)$ lautet

$$\text{adj } \underline{B}_1(z) = \begin{bmatrix} b_{22}(z) & -b_{12}(z) \\ -b_{21}(z) & b_{11}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z+10 & -4z^2-5z-6 \\ -7z-8 & z^2+2z+3 \end{bmatrix}.$$

In der Nennerpolynommatrix des Entkopplungsnetzwerks muß der I-Anteil des Reglers und die Bedingung nach Gl. (5.3.3) berücksichtigt werden. Damit erhält man die Nennerpolynommatrix des realisierbaren Entkopplungsnetzwerk

$$\underline{S}(z) = \begin{bmatrix} (z-1) & 0 \\ 0 & z(z-1) \end{bmatrix}.$$

Die erweiterte Regelstrecke, Gl. (5.3.4), wird beschrieben durch

$$\underline{B}'(z) = \begin{bmatrix} -19z^3-49z^2-35z-18 & 0 \\ 0 & -19z^3-49z^2-35z-18 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}'(z) = \begin{bmatrix} (z-0.5)^3 (z-1) & 0 \\ 0 & (z-0.3)^2 z (z-1) \end{bmatrix}.$$

Für das entkoppelte System $\underline{B}'(z) \underline{A}'^{-1}(z)$ kann nun nach der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Methode ein proportionaler dynamischer Regler entworfen werden. Das Blockschaltbild dieses entkoppelnden PI-Zustandsreglers ist in Bild 5.3.2 dargestellt.

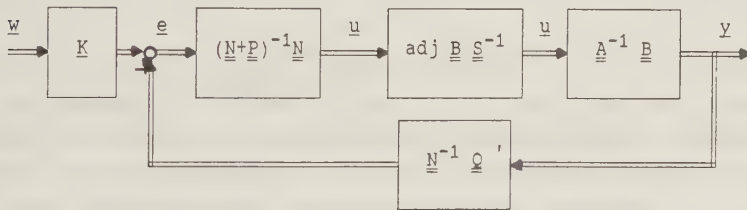


Bild 5.3.2 Entkoppelnder PI-Zustandsregler

Ein wichtiger Vorteil des Verfahrens nach [J1] ist es, daß das Entkopplungsnetzwerk in der Polynommatrixdarstellung sehr leicht berechnet werden kann. Als numerisches Verfahren wird hierbei ein Algorithmus zur Inversion von Rosenbrock'schen Systemmatrizen nach [V1] genutzt. Die Entkopplung wird durch Hinzufügen von Nullstellen zur Regelstrecke erreicht. Es ist nicht nötig - wie bei vielen anderen Verfahren [C4, W13, H2] - Nullstellen durch Pole zu kompensieren und damit z.B. Pole extrem zu verschieben, was zu sehr großen Stellamplituden führen würde. Weiterhin ist der geschlossene Regelkreis auch für Ausgangsstörungen völlig entkoppelt.

Ein Nachteil des Verfahrens ist die Erhöhung der Ordnung der erweiterten Regelstrecke, die besonders bei Systemen mit vielen Ein- und Ausgängen groß ist. Insgesamt wird die Ordnung der Regelstrecke um $(r-1)$ grad ($\det \underline{B}_1(z)$) erhöht. Dies kann jedoch wegen der Unempfindlichkeit der Regelung gegenüber Parameteränderungen der Regelstrecke in Kauf genommen werden.

5.4 Synthese quadratisch optimaler Regelkreise durch Spektralfaktorisierung

Im den vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, wie man Regelkreise mit bestimmten vorgegebenen charakteristischen Polynommatrizen entwerfen kann. Es ist jedoch im allgemeinen ein großes Problem diese charakteristischen Polynommatrizen für Mehrgroßensysteme sinnvoll festzulegen. In der Literatur werden dazu z.B. Methoden wie Wurzelortskurvenverfahren und Mehrgroßen-Nyquistverfahren [P2] angegeben. Alle diese Verfahren orientieren sich am charakteristischen Polynom des Regelkreises, das aus der Determinante der Übertragungsmatrix berechnet wird. Die Verkopplungen in Mehrgroßensystemen werden indirekt berücksichtigt und die dadurch beim Entwurf erforderliche interaktive grafisch orientierte Arbeitsweise verursacht einen erheblichen Aufwand und macht diese Entwurfsmethoden schwer handhabbar.

Demgegenüber ist der Synthese quadratisch optimaler Regelkreise für den Entwurfsingenieur relativ einfach, denn er braucht nur anzugeben, wie die einzelnen Ausgangsgrößen und Stellgrößen untereinander, gemäß ihrem Beitrag zum Gütekriterium, gewichtet werden sollen. Außerdem kann gezeigt werden, daß die so entworfenen Regelkreise unendliche Amplitudenreserve sowie eine Phasenreserve von mindestens 60° aufweisen [K7]. Deshalb soll auch hier für die in den vorangehenden Abschnitten angegebenen Regelstrukturen eine charakteristische Polynommatrix für den geschlossenen Regelkreis berechnet werden, die dem Regelkreis die gleichen Eigenschaften wie quadratisch optimale Zustandsregelung gibt.

Da diskrete und kontinuierliche Systeme im Gegensatz zu den vorangehenden Abschnitten, wo man ohne weiteres die Variable "z" gegen "s" austauschen kann, wegen der Form der Gütekriterien unterschiedlich behandelt werden müssen, werden im folgenden zunächst kontinuierliche Systeme betrachtet. Damit wird die Analogie zwischen der Spektralfaktorisierung von Polynommatrizen und der Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung aufgezeigt. Schließlich wird durch die Definition der charakteristischen Polynommatrix des kanonischen Hamiltonschen Systems auch die Lösung für diskrete Systeme angegeben.

5.4.1 Berechnung der charakteristischen Polynommatrix des optimalen Regelkreises

Man bezeichnet einen linearen zeitinvarianten Regelkreis als quadratisch optimal [K20], wenn er im diskreten Fall das Gütekriterium

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\underline{x}^T(k) \Phi_x \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) \Phi_u \underline{u}(k) \right] \quad (5.4.1.1.a)$$

und im kontinuierlichen Fall das Gütefunktional

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T(t) \Phi_x \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \Phi_u \underline{u}(t) \right] dt \quad (5.4.1.1.b)$$

minimiert. Hierbei bedeutet

$\Phi_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$: positiv semidefinite Bewertungsmatrix für die Zustände der Regelstrecke

$\Phi_u \in \mathbb{R}^{r \times r}$: positiv definite Bewertungsmatrix für die Stellgrößen der Regelstrecke.

Die Berechnung der Zustandsrückführmatrix $\underline{F}$ des kontinuierlichen quadratisch optimalen Reglers in Bild 5.4.1.1 erfolgt im Zeitbereich durch Lösen der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung [K20]. Für die Zustandsrückführmatrix gilt

$$\underline{F} = \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K}, \quad (5.4.1.2)$$

wobei $\underline{K}$ die positiv definite Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung

$$\Phi_x = \underline{K} \underline{B} \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K} - \underline{K} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{K} \quad (5.4.1.3)$$

ist.

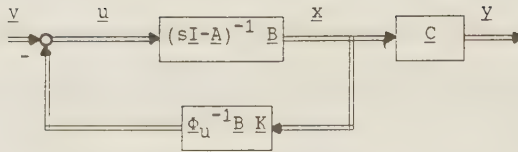


Bild 5.4.1.1. Struktur der optimalen Zustandsrückführung

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Berechnung der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises $\underline{D}(s)$ durch Spektralfaktorisierung äquivalent zur Berechnung der Zustandsrückführmatrix $\underline{F}$ mit Hilfe der Matrix-Riccati-Gleichung ist. Es werden die Ergebnisse nach [K12] erhalten, jedoch wird die Herleitung in Anlehnung an [K20] aus der Zustandsraumbeschreibung durchgeführt. Um zu zeigen, wie eine Zustandsrückführung in der Polynommatrixdarstellung beschrieben werden kann, soll zunächst ein Zusammenhang zwischen der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises $\underline{D}(s)$ und der Zustandsrückführmatrix $\underline{F}$ hergeleitet werden. Die Übertragungsmatrix der Regelstrecke ist durch

$$\underline{G}_{yu}(s) = \underline{B}(s) \underline{A}^{-1}(s) = \underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (5.4.1.4)$$

gegeben. Für die weitere Rechnung wird angenommen, daß die Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ in Regelungsnormalform vorliegt und daß die führende Koeffizientenmatrix von $\underline{A}(s)$ die Einheitsmatrix ist. Dann besteht zwischen Zählerpolynommatrix $\underline{B}(s)$ und der Beobachtungsmatrix $\underline{C}$ der Zusammenhang

$$\underline{B}(s) = \underline{C} \underline{Q}(s) . \quad (5.4.1.5)$$

Weiterhin kann für die Übertragungsmatrix vom Eingang zum Zustand des offenen Regelkreises

$$\underline{Q}(s) \underline{A}^{-1}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (5.4.1.6)$$

geschrieben werden.

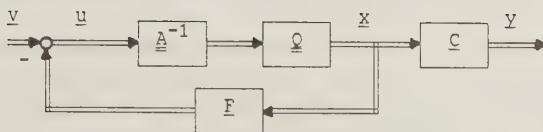


Bild 5.4.1.2. Regelkreis mit Zustandsregler im Frequenzbereich

Jetzt muß die Führungsübertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises in Bild 5.4.1.2 berechnet werden. Es gilt

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{F} \underline{Q}(s) \underline{A}^{-1}(s) \underline{u}$$

$$[\underline{I} + \underline{F} \underline{Q}(s) \underline{A}^{-1}(s)] \underline{u} = \underline{v}$$

$$\underline{u} = \underline{A}(s) [\underline{A}(s) + \underline{F} \underline{Q}(s)]^{-1} \underline{v} ,$$

so daß man als Beziehung zwischen Ein- und Ausgangsgröße des Regelkreises

$$\underline{y} = \underline{Q}(s) [\underline{A}(s) + \underline{F} \underline{Q}(s)]^{-1} \underline{v} = \underline{Q}(s) \underline{D}^{-1}(s) \underline{v} \quad (5.4.1.7)$$

erhält. Der Zusammenhang zwischen der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises $\underline{D}(s)$ und der Zustandsrückführmatrix $\underline{F}$ ist durch

$$\underline{D}(s) = \underline{A}(s) + \underline{F} \underline{Q}(s). \quad (5.4.1.8)$$

gegeben, da die Beschreibung der Regelstrecke in Regelungsnormalform vorliegt. Aus Gl. (5.4.1.7) folgt außerdem, daß man durch Zustandsrückführung nur die Nennerpolynommatrix, nicht aber die Zählerpolynommatrix der Regelstrecke verändern kann. Dies deckt sich also mit der bekannten Tatsache, daß die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke invariant gegenüber einer Zustandsrückführung sind.

Gl. (5.4.1.8) kann mit Hilfe von Gl. (5.4.1.6) auch als

$$\begin{aligned} \underline{D}(s) &= [\underline{I} + \underline{F} \underline{Q}(s) \underline{A}^{-1}(s)] \underline{A}(s) \\ &= [\underline{I} + \underline{F} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}] \underline{A}(s) \end{aligned} \quad (5.4.1.9)$$

geschrieben werden. Damit kann $\underline{D}(s)$ als Produkt der sogenannten Rückführdifferenzmatrix $[\underline{U}_2]$ und der Nennerpolynommatrix der Regelstrecke aufgefaßt werden. Durch Einsetzen von Gl. (5.4.1.2) erhält man schließlich

$$\underline{D}(s) = [\underline{I} + \underline{\Phi}_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}] \underline{A}(s) . \quad (5.4.1.10)$$

Will man $\underline{D}(s)$ mit Hilfe von Gl. (5.4.1.8) berechnen, dann müßte man die Matrix-Riccati-Gleichung, Gl. (5.4.1.3), lösen. In dieser Arbeit soll $\underline{D}(s)$ jedoch ausschließlich mit Frequenzbereichsmethoden bestimmt werden. Deshalb wird eine Vorgehensweise im Frequenzbereich gesucht, die dem Lösen der Matrix-Riccati-Gleichung äquivalent ist. Bei dieser Methode spielt die Transjugierte

$$\underline{A}_*(s) = \underline{A}^T(-s) \quad (5.4.1.11)$$

einer Polynommatrix eine wichtige Rolle. Mit Hilfe der Definition, Gl. (5.4.1.11), und des Produktes

$$\begin{aligned} \underline{D}_*(s) \underline{\Phi}_u \underline{D}(s) &= \underline{A}_*(s) [\underline{I} + \underline{B}^T (s \underline{I} - \underline{A})_*^{-1} \underline{K}^T \underline{B} \underline{\Phi}_u^{-T}] \underline{\Phi}_u \\ &\quad [\underline{I} + \underline{\Phi}_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}] \underline{A}(s) \end{aligned}$$

kann man nach einigen Umformungen die Polynommatrizengleichung der Spektralfaktorisierung herleiten. Durch Ausmultiplizieren unter Beachtung von $\underline{K} = \underline{K}^T$ und $\underline{\Phi}_u = \underline{\Phi}_u^T$ folgt

$$\begin{aligned} \underline{D}_*(s) \underline{\Phi}_u \underline{D}(s) &= \underline{A}_*(s) \underline{\Phi}_u \underline{A}(s) + \underline{A}_*(s) \underline{B}^T (s \underline{I} - \underline{A})_*^{-1} \\ &\quad [\underline{K} (s \underline{I} - \underline{A}) + (s \underline{I} - \underline{A})_* \underline{K} + \underline{K} \underline{B} \underline{\Phi}_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K}] \\ &\quad (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{A}(s) . \end{aligned}$$

Aus Gl. (5.4.1.6) ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} \underline{D}_*(s) \underline{\Phi}_u \underline{D}(s) &= \underline{A}_*(s) \underline{\Phi}_u \underline{A}(s) + \\ &\quad \underline{Q}_*(s) [\underline{K} \underline{B} \underline{\Phi}_u^{-1} \underline{B}^T \underline{K} - \underline{K} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{K}] \underline{Q}(s) \end{aligned}$$

mit

$$\underline{Q}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{A}(s) .$$

In den eckigen Klammern steht genau die rechte Seite der Matrix-Riccati-Gleichung, Gl. (5.4.1.3), die der Zustandsbewertungsmatrix gleichgesetzt ist. Das bedeutet wiederum, daß die gesuchte charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises auch als Lösung von

$$\underline{D}_*(s) \Phi_u \underline{D}(s) = \underline{A}_*(s) \Phi_u \underline{A}(s) + \underline{Q}_*(s) \Phi_x \underline{Q}(s) \quad (5.4.1.12)$$

berechnet werden kann.

In Gl. (5.4.1.5) wurde vorausgesetzt, daß die Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke in Regulationsnormalform vorliegt. Um Φ_x sinnvoll vorgeben zu können, sollte jedoch die physikalische Bedeutung der Zustände bekannt sein. Dies bereitet jedoch oft Schwierigkeiten, da die Zustände in dieser Basis des Zustandsraums im allgemeinen Linearkombinationen von physikalisch interpretierbaren Zustandsgrößen sind. Aus diesem Grunde und um die Zahl der freien Parameter einzuschränken, wird hier auf die Bewertung aller Zustände verzichtet. Stattdessen werden nur die Ausgangsgrößen der Regelstrecke gewichtet. Für den Zusammenhang zwischen der Zustandsbewertungsmatrix Φ_x und der Ausgangsbewertungsmatrix Φ_y gilt

$$\Phi_x = \underline{C}^T \Phi_y \underline{C} . \quad (5.4.1.13)$$

Mit Hilfe von Gl. (5.4.1.13) und Gl. (5.4.1.5) folgt aus Gl. (5.4.1.12) die bekannte Spektralfaktorisierungsvorschrift [K15, K16]

$$\begin{aligned} \underline{D}_*(s) \Phi_u \underline{D}(s) &= \underline{A}_*(s) \Phi_u \underline{A}(s) + \underline{Q}_*(s) \underline{C}^T \Phi_x \underline{C} \underline{Q}(s) \\ &= \underline{A}_*(s) \Phi_u \underline{A}(s) + \underline{B}_*(s) \Phi_y \underline{B}(s) . \end{aligned} \quad (5.4.1.14)$$

Um eine entsprechende Gleichung auch für diskrete Systeme anzugeben, wird ein anderer Weg beschritten, da die Herleitung über die diskrete Matrix-Riccati-Gleichung rechentechnisch ungünstig ist. Dazu wird zunächst das kontinuierliche kanonische Hamiltonsche System [K7] nach Bild 5.4.1.1 betrachtet, das der Zustandsdifferentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{\psi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \\ \underline{C}^T \Phi_y \underline{C} & -\underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad (5.4.1.15)$$

entspricht.

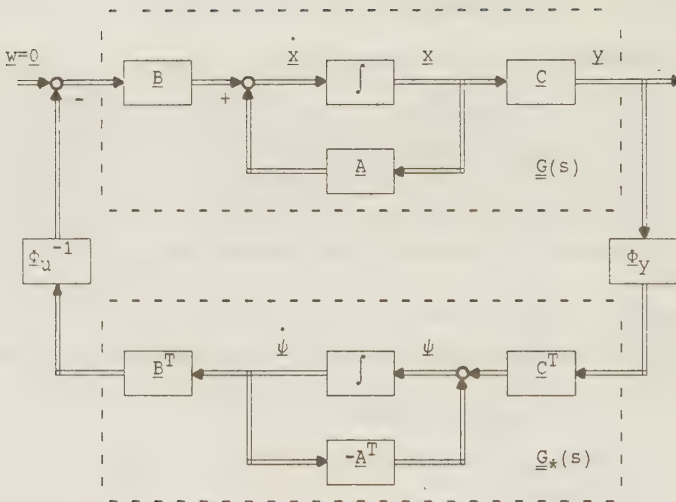


Bild 5.4.1.3. Blockschaltbild des kontinuierlichen kanonischen Systems

Mit der Rückführung der Ausgangsgröße y über die Bewertungsmatrizen und das transjungierte System erhält man aus

$$\tilde{\underline{G}}(s) = [\underline{I} + \Phi_u^{-1} \underline{G}_*(s) \Phi_Y \underline{G}(s)]^{-1} \quad (5.4.1.16)$$

mit der primen Zerlegung

$$\underline{G}(s) = \underline{B}(s) \underline{A}^{-1}(s), \quad \underline{G}_*(s) = \underline{A}_*^{-1}(s) \underline{B}_*(s)$$

die charakteristische Polynommatrix des kanonischen Systems

$$\tilde{\underline{D}}(s) = \underline{A}_*(s) \Phi_u \underline{A}(s) + \underline{B}_*(s) \Phi_Y \underline{B}(s) . \quad (5.4.1.17)$$

Daraus folgt, daß Gl. (5.4.1.14) als Spektralfaktorisierung der charakteristischen Polynommatrix des Hamiltonschen Systems, Gl. (5.4.1.15), interpretiert werden kann.

Bild 5.4.1.4 zeigt das Blockschaltbild zum diskreten kanonischen System

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{\psi}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \\ \underline{C}^T \Phi_y \underline{C} & -\underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\psi}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (5.4.1.18)$$

das völlig analog zu Bild 5.4.1.3 aufgebaut werden kann.

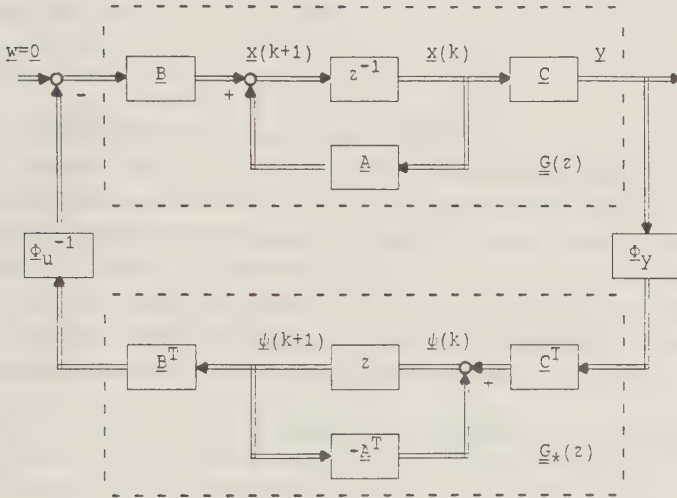


Bild 5.4.1.4 Blockschaltbild des diskreten kanonischen Systems

Da sowohl Systemdarstellungen in z als auch in z^{-1} in der Beschreibung durch Polynommatrizen gehandhabt werden können, ist es hier nicht notwendig Gl. (5.4.1.18) in ein äquivalentes realisierbares System

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{\psi}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} + \underline{B} \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \underline{C}^T \Phi_y \underline{C} & \underline{B} \Phi_u^{-1} \underline{B}^T \underline{A}^{-T} \\ \underline{A}^{-T} \underline{C}^T \Phi_y \underline{C} & \underline{A}^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\psi}(k) \end{bmatrix}. \quad (5.4.1.19)$$

umzuformen, um davon ausgehend das Stellgesetz im Zeitbereich und die diskrete Matrix-Riccati-Gleichung herzuleiten [K20, U2]. Stattdessen kann in Übereinstimmung mit den Gln. (5.4.1.15-17) sofort die charakteristische Polynommatrix des quadratisch optimalen geschlossenen Regelkreises $\underline{D}(z)$,

deren invariante Nullstellen im Inneren des Einheitskreises liegen, durch spektrale Faktorisierung von

$$\underline{D}_*(z) \Phi_u \underline{D}(z) = \underline{A}_*(z) \Phi_u \underline{A}(z) + \underline{B}_*(z) \Phi_y \underline{B}(z) \quad (5.4.1.20)$$

mit

$$\underline{D}_*(z) = \underline{D}^T(1/z)$$

erhalten werden.

Die invarianten Nullstellen der Polynommatrizen der linken Seite von Gl. (5.4.1.20) liegen spiegelsymmetrisch zum Einheitskreis der z -Ebene. Die rechte Seite dieser Gleichung kann also mit den Verfahren aus Abschnitt 3.5 so faktorisiert werden, daß die Lösungspolynommatrix $\underline{D}(z)$ alle stabilen Wurzeln enthält und die transjungierte Polynommatrix $\underline{D}_*(z)$ alle instabilen. Man spricht in diesem Fall auch von einem reziproken Wurzelort [K7]. Für kontinuierlichen Systeme nach Gl. (5.4.1.15) erhält man einen symmetrischen Wurzelort, es besteht also Symmetrie zur imaginären Achse der s -Ebene.

Gl. (5.4.1.20) wird üblicherweise zur Spektralfaktorisierung von rechten Polynommatrizenquotienten $\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z)$ für die in Abschnitt 5.1 vorgestellte proportionale Zustandsregelung benutzt. Für den Entwurf der charakteristischen Polynommatrix des Folgereglers nach Abschnitt 5.2 ist es geboten, die Spektralfaktorisierung, nach Gl. (5.4.1.14, 20) zu erweitern, um möglichst viele Freiheitsgrade ausnutzen zu können.

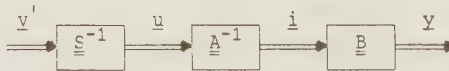


Bild 5.4.1.5. Erweiterte Regelstrecke des Folgereglers

Bild 5.4.1.5 zeigt noch einmal die um das Störmodell erweiterte Regelstrecke des Folgereglers. Man kann die Stellgröße u und den "inneren Zustand" $i(s)$ ebenso wie den Ausgangsvektor $y(s)$ als Ausgangsgrößen einer erweiterten Regelstrecke auffassen. Der Eingangsvektor $v'(s)$ des Störmodells ist die Stellgröße der erweiterten Regelstrecke. Damit erhält man ge-

danklich die folgende Systemdarstellung, für die dann die Spektralfaktorisierung durchgeführt wird. Für die prime Zerlegung des erweiterten Systems

$$\begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \underline{i} \\ \underline{u} \end{bmatrix} = \underline{B}, \underline{A}^{-1} \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{I} \\ \underline{A} \end{bmatrix} (\underline{S} \underline{A})^{-1} \underline{Y}$$

erhält man mit Gl. (5.4.1.14,20)

$$\underline{E}_* \Phi_V \underline{E} = (\underline{A} \underline{S})_* \Phi_V (\underline{S} \underline{A}) + [\underline{B}_* \underline{I} \underline{A}_*] \begin{bmatrix} \Phi_Y & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{I} \\ \underline{A} \end{bmatrix},$$

was durch Ausmultiplizieren der rechten Seite auch als

$$\underline{E}_* \Phi_V \underline{E} = \underline{A}_* \underline{S}_* \Phi_V \underline{S} \underline{A} + \underline{A}_* \Phi_u \underline{A} + \underline{B}_* \Phi_Y \underline{B} + \Phi_i \quad (5.4.1.21)$$

geschrieben werden kann. Hierbei bedeutet

$\Phi_V \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv definite Bewertungsmatrix für die Eingangsgrößen des Störmodells

$\Phi_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv semidefinite Bewertungsmatrix für die Stellgrößen

$\Phi_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv semidefinite Bewertungsmatrix für die 'inneren Zustände' [W17]

$\Phi_Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv semidefinite Bewertungsmatrix für die Ausgangsgrößen.

Auf die Rolle der Matrizen Φ_u und Φ_Y wurde schon hingewiesen. Die Auswirkung der Wahl von Φ_V kann man z.B. anhand eines Reglers mit integralem Stellgesetz erläutern: Wenn das Störmodell ein Integrator ist, dann werden mit Φ_V die Ableitungen der Stellgrößen bewertet. Eine Bewertungsmatrix $\Phi_i > 0$ bewirkt eine weitere Verschiebung der Pole von $\underline{E}(s)$ in das Innere des Einheitskreises für diskrete Systeme, bzw. in die linke s-Halbebene für eine kontinuierliche Systembeschreibung.

5.4.2 Berechnung der charakteristischen Polynommatrix des quadratisch optimalen Beobachters

Der Entwurf eines quadratisch optimalen Beobachters, der auch als stationäres Kalman-Bucy-Filter bezeichnet wird, ist dual zu dem in Abschnitt 5.4.1 behandelten Problem. Es ist eine optimale Ausgangsrückführmatrix $\underline{H}$ bzw. eine charakteristische Polynommatrix des Beobachters $\underline{N}(s)$ zu bestimmen, mit der das in Bild 5.4.2.1 dargestellte Schätzfehlersystem des Beobachters stabilisiert wird.

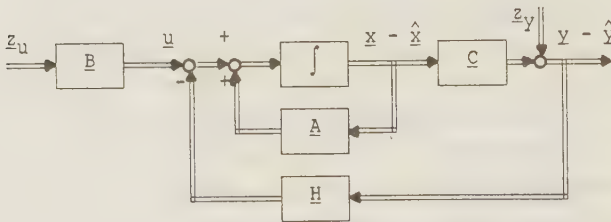


Bild 5.4.2.1. Übertragungssystem des Schätzfehlers eines Beobachters mit Eingangsstörung $\underline{z}_u$ und Ausgangsstörung $\underline{z}_y$

Im Zeitbereich kann für kontinuierliche Systeme

$$\underline{H} = \underline{K} \underline{C}^T \underline{\Phi}_{zy}^{-1} \quad (5.4.2.1)$$

wieder durch Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung

$$\underline{B} \underline{\Phi}_{zu} \underline{B}^T = \underline{K} \underline{C}^T \underline{\Phi}_{zy}^{-1} \underline{C} \underline{K} - \underline{K} \underline{A}^T - \underline{A} \underline{K} \quad (5.4.2.2)$$

mit den Gewichtungen

$\underline{\Phi}_{zy} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv definite Bewertungsmatrix für die Störungen am Streckenausgang

$\underline{\Phi}_{zu} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: positiv semidefinite Bewertungsmatrix für die Störungen am Streckeneingang

bestimmt werden.

Der Matrix-Riccati-Gleichung des stationären Kalman-Bucy-Filters entspricht im Frequenzbereich wiederum eine Spektralfaktorisierungsvorschrift. Diese kann analog zu Abschnitt 5.4.1 hergeleitet werden, wobei allerdings zu beachten ist, daß die Spektralfaktorisierung wegen der Ausgangsrückführung diesmal für einen linken Polynommatrizenquotienten $\underline{A}_1^{-1}(s) \underline{B}_1(s)$ erfolgt. Damit ergibt sich für die optimale charakteristische Polynommatrix des Beobachters $\underline{N}(s)$ für ein kontinuierliches System

$$\underline{N}(s) \Phi_{zu} \underline{N}^*(s) = \underline{A}_1(s) \Phi_{zu} \underline{A}_1^*(s) + \underline{B}_1(s) \Phi_{zy} \underline{B}_1^*(s) \quad (5.4.2.3a)$$

und $\underline{N}(z)$ für eine diskrete Systembeschreibung

$$\underline{N}(z) \Phi_{zu} \underline{N}^*(z) = \underline{A}_1(z) \Phi_{zu} \underline{A}_1^*(z) + \underline{B}_1(z) \Phi_{zy} \underline{B}_1^*(z) \quad (5.4.2.3b)$$

durch die spektrale Faktorisierung von Gl. (5.4.2.3). Wie man leicht nachprüfen kann, sind die Zeilengrade von $\underline{N}$ gleich den Zeilengraden von $\underline{A}_1$, so daß Gl. (5.4.2.3) einen vollständigen Beobachter liefert.

Mit den in Abschnitt 5.4 angegebenen Methoden ist die Möglichkeit gegeben, mittels des in Kapitel 3 angegebenen Verfahrens zur Spektralfaktorisierung, charakteristische Polynommatrizen zu bestimmen, die die Dynamik des geschlossenen Regelkreises für proportionale Zustandsrückführung mit Beobachter und für den erweiterten Regler mit Stör- und Führungsmodell im Sinne eines quadratischen Gütekriteriums festlegen. Bei der Synthese des Reglers besteht die Eingriffsmöglichkeit in der Wahl der Bewertungsmatrizen. Hier kann der Entwurfsingenieur durch Simulation des geschlossenen Regelkreises, Wurzelortskurven in Abhängigkeit von den Gewichtsfaktoren und die Darstellung der maximalen und minimalen singulären Werte der Rückfuhrdifferenzmatrix über der Frequenz [D10, G3, S3] unterstützt werden.

6. Erprobung der Regelalgorithmen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden, neben der Formulierung aller numerischen Algorithmen nach Kapitel 3 als mathematische Bibliotheksroutinen in Anlehnung an [D9 ,G2 ,B6], einige interaktive modulare Programme für die Analyse und Synthese von Mehrgrößenregelkreisen, innerhalb eines umfassenden rechnergestützten Systems [K10], implementiert. Diese Programme dienen der Verwaltung einer Datenbasis der System- und Reglerbeschreibungen, arithmetischen Operationen mit Polynommatrizen, Manipulation von Systemen in Polynommatrixbeschreibung, Reglersynthese, Parameteridentifikation, Simulation und Echtzeitregelung. Einzelheiten der Implementierung auf dem Digitalrechner können [K11, K10] entnommen werden. An dieser Stelle sollen nur Ergebnisse der Reglersynthese und Regelung vorgestellt werden.

In Kapitel 5 wurde eine lineare Reglerstruktur angegeben und auch die Systembeschreibung durch Polynommatrizen betrachtet nur lineare zeitinvariante Systeme. Reale Systeme sind meist nur in der Umgebung eines festen Arbeitspunktes durch eine lineare Beschreibungsform anzunähern. Daher sollte ein praktisch eingesetztes Regelungskonzept unempfindlich gegenüber schlecht modellierter Dynamik der Regelstrecke sein. Für die Theorie der quadratisch optimalen Regler gibt es zahlreiche Veröffentlichungen, die das Problem der Robustheit dieses Regelkonzepts untersuchen [G3, S1, L3]. Die in diesen Arbeiten angegebenen Ergebnisse gelten auch für die Reglersynthese über Berechnung der charakteristischen Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises mittels Spektralfaktorisierung nach Abschnitt 5.4. Doch die beste Möglichkeit, die Anwendbarkeit einer Regelstrategie zu demonstrieren, ist die Erprobung an einem nichttrivialen realen Mehrgrößenprozeß.

Dazu wird in Abschnitt 6.1 über Modellbildung und Regelung für einen im Labor aufgebauten Turbogeneratorsatz berichtet. Hierbei handelt es sich zwar um einen Synchrongenerator kleiner Leistung, doch bei elektrischen Maschinen sind gerade Anlagen geringer Baugröße, wegen unvollständiger Kompensation der magnetischen Felder und hohen ohmschen und mechanischen Verlusten, schwierig zu regeln. Um die Vorteile der Systembeschreibung durch Polynommatrizen gegenüber der Darstellung des Mehrgrößensystems durch Übertragungsmatrizen zu zeigen, wird in Abschnitt 6.2 die Synthese einer Regelung für das (3×3) -System Kunststoffextruder [B4] besprochen. Für diese Anlage wurde die Regelung mittels Simulationsstudien untersucht.

6.1 Modellbildung, Reglerentwurf und Echtzeitregelung für die Laborregelstrecke Turbogenerator

Um die praktische Anwendbarkeit der in dieser Arbeit dargestellten Regelstrategie zu zeigen, wurde als Zweigroßenregelstrecke das Labormodell eines Turbogenerators ausgewählt, an dem alle in Kapitel 5 formulierten Regelverfahren erprobt werden konnten. Die parametrischen Beschreibungen, auf deren Grundlage die Reglersynthese durchgeführt wurde, sind durch Parameteridentifikation nach Kapitel 4 ermittelt worden. In Abschnitt 6.1.1 wird zunächst eine Beschreibung der Laboranlage angegeben. Anhand von gemessenen Kennlinien und Sprungantworten wird die nichtlineare Charakteristik des Übertragungssystems Turbogeneratorsatz verdeutlicht. Zwei mittels parametrischer Schätzung gewonnene Modelle in Form eines linken Polynommatrixquotienten werden in Abschnitt 6.1.2 angegeben. Die Ergebnisse der experimentellen Erprobung der Regelung werden in Abschnitt 6.3 dargestellt und diskutiert.

6.1.1. Die Versuchsanlage Turbogenerator

Bild 6.1.1.1 zeigt den Versuchsaufbau des Turbogeneratorsatzes. Ein Druckluftmotor, der über ein Druckminderventil aus dem zentralen Druckluftnetz gespeist wird, treibt einen im Inselbetrieb arbeitenden Synchrongenerator an. Als Verbraucher dient eine symmetrische ohmsche Last, die zwischen den Werten $1.8 \, \Omega$ und $2.8 \, \Omega$ umschaltbar ist. Als Ausgangsgrößen werden die Drehzahl n , die über einen Tachogenerator gemessen wird, und der Gleichrichtwert U_A der Generatorspannung betrachtet. Die Ventilöffnung V für die Ansteuerung des Druckluftmotors und der Erregerstrom i_e des Synchrongenerators sind die Stellgrößen des Systems.

In Bild 6.1.1.2 ist der Verlauf der statischen Kennlinie zwischen Generatorspannung und Erregerstrom angegeben. Die Kurvenschar ist für vier verschiedene Ventilöffnungen als Parameter dargestellt. Insbesondere in den Arbeitspunkt AP2 und AP3 erkennt man, daß selbst für kleine Eingangsgrößen die stationäre Verstärkung der Übertragungsfunktion von Erregerstrom i_e nach Generatorspannung U_A zwischen positiven und negativen Werten schwankt.

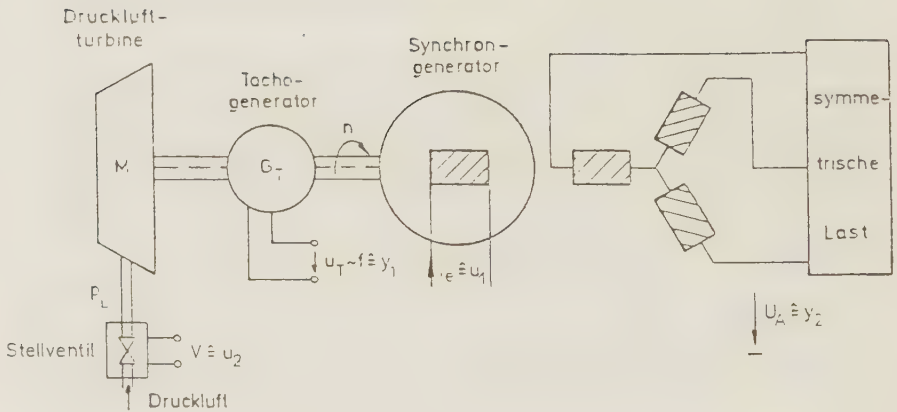


Bild 6.1.1.1 Schematisches Diagramm der Versuchsanlage

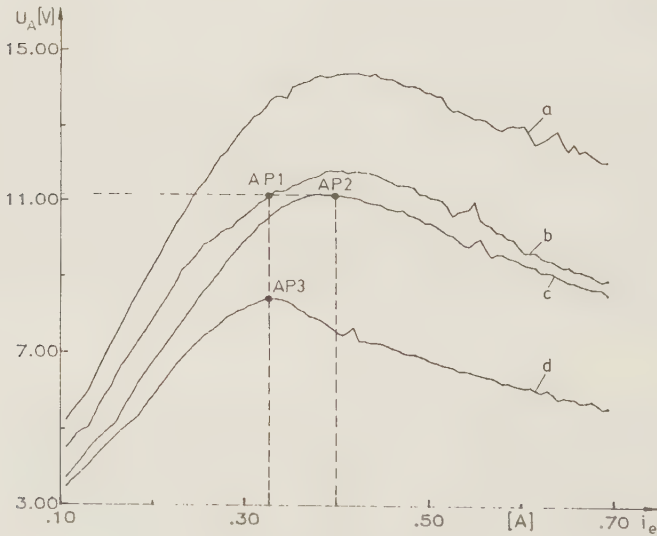


Bild 6.1.1.2 Statische Kennlinie der Generatorspannung in Abhängigkeit vom Erregerstrom

Besonders kritisch sind Arbeitspunkte nahe am Wendepunkt der Generatorspannungskennlinie. In dieser Arbeit wurde bewußt der kritische Arbeitspunkt 2 gewählt, um die Unempfindlichkeit der Reglerentwürfe gegenüber Parametervariationen zu überprüfen. Alle Regler wurden für den Arbeitspunkt 2 nach Tabelle 6.1.1.1 und eine Abtastzeit von 100 ms entworfen und auch die parametrische Identifikation wurde unter diesen Versuchsbedingungen durchgeführt.

Erregerstrom $i_e = 0.4 \text{ A}$	Drehzahl $n = 800 \text{ min}^{-1}$
Ventilöffnung $V = 60 \%$	Spannung $U_A = 11 \text{ V}$

Tabelle 6.1.1.1 Stationärer Arbeitspunkt für die Versuchsdurchführung

Für die Stellgrößen und die Ausgangsgrößen im Arbeitspunkt gilt der Zusammenhang nach Tabelle 6.1.1.2.

Erregerstrom	$i_e : u_1 = \pm 1 \hat{=} \pm 0.3 \text{ A}$
Ventilöffnung	$v : u_2 = \pm 1 \hat{=} \pm 30 \%$
Frequenz	$f : y_1 = \pm 1 \hat{=} \pm 200 \text{ Hz}$
Spannung	$u_A : y_2 = \pm 1 \hat{=} \pm 20 \text{ V}$

Tabelle 6.1.1.2 Zusammenhang zwischen physikalischen und normierten Stell- und Regelgrößen

Bild 6.1.1.3 zeigt die Sprungantworten der Regelstrecke im gewählten Arbeitspunkt für $u_1 = u_2 = \pm 0,25$. Wie man schon den statischen Kennlinien nach Bild 6.1.1.2 entnehmen konnte, sind die stationären Endwerte der Übergangsfunktionen für positive und negative Sprünge unterschiedlich. Das gilt auch für verschiedene Sprunghöhen. Selbst für die geringe Auslenkung aus dem Arbeitspunkt ist der stationäre Wert von $h_{21}(t)$, insbesondere für negative Sprünge, deutlich verschieden von Null.

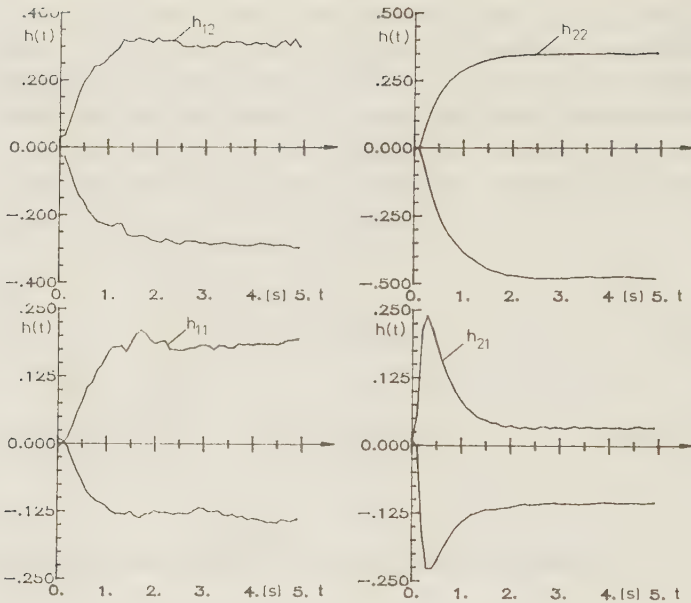


Bild 6.1.1.3 Gemessene Übergangsfunktionen der Regelstrecke

Die Übergangsfunktionen $h_{11}(t)$, $h_{12}(t)$ und $h_{22}(t)$ zeigen PT₂-Verhalten. Für $h_{21}(t)$ muß dagegen $g_{21}(s)$ als Übertragungsfunktion 3. Ordnung angesetzt werden. Ein Identifikation mit Eingroßenmethoden muß die entsprechenden Ordnungen für die Einzelmodelle ansetzen. Da für eine reale Regelstrecke, wie sie hier vorliegt, im allgemeinen die Parameter der Nennerpolynome so geschätzt werden, daß die Einzelmodelle keine gemeinsamen Pole besitzen, erhält man mit diesem Modellansatz die Ordnung neun für eine minimale Zustandsraumrealisierung. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß durch den Ansatz eines Mehrgrößenmodells in Form eines linken Polynommatrixquotienten die Regelstrecke mit weit geringerer Ordnung beschrieben werden kann.

6.1.2 Identifikation eines parametrischen Modells

Im gewählten Arbeitspunkt wurde die Regelstrecke mit einem durch einen diskreten Zufallsgenerator erzeugtes weisses Rauschsignal mit einer Pulsweite von 500 ms angeregt. Damit das lineare Signalverhalten im kleinen betrachtet werden kann, wurde die maximale Amplitude der Eingangssignale auf den Wert 0.25 beschränkt. Durch Berücksichtigung einer Phasenverschiebung von 10 Sekunden kann die Unabhängigkeit beider Eingangssignale voneinander

garantiert werden. Unter diesen Bedingungen wurde bei einer Abtastzeit von 100 ms eine Meßreihe mit 2000 Abtastwerten aufgenommen, wobei sich für die Eingangssignale ein quadratischer Mittelwert von 0.14 ergab.

Zunächst wurden die den Zeilengraden der Nennerpolynommatrix entsprechenden Strukturindizes $v_1 = v_2 = 2$ gewählt, so daß man mit

$$\text{grad}_{ij} \underline{\underline{A}}(z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

eine Systemordnung von $n=4$ erhält. Insgesamt 16 Parameter des linken Polynommatrixquotienten sind für diesen Modellansatz zu ermitteln.

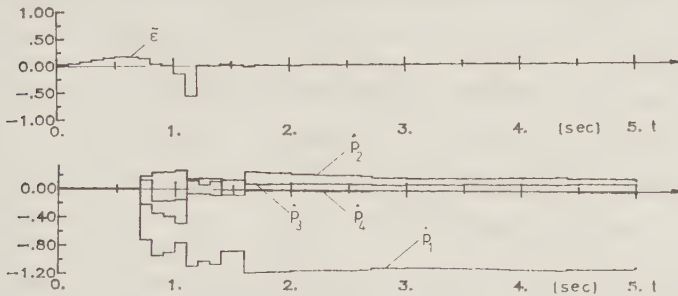


Bild 6.1.2.1 Verlauf der Fehlerfunktion und der Parameter

Bild 6.1.2.1 zeigt das Konvergenzverhalten für die 4 Parameter der ersten Zeile der Polynommatrix $\underline{\underline{A}}(z)$ bei Einsatz der pseudorekursiven QR-Zerlegung nach Abschnitt 4.2 während der ersten 50 Abtastschritte. Im achten Abtastschritt kann zum ersten Mal die Rücksubstitution zur Berechnung der Parameter durchgeführt werden. Im Gegensatz zu Verfahren für die rekursive LS-Schätzung, wobei durch die hohe Anfangsnorm der Kovarianzmatrix zunächst große Parameterabweichungen auftreten, ist die Varianz der Parameter für die Schätzung mittels der pseudorekursiven Methode zu Beginn der Auswertung sehr gering. Schon nach zwei Sekunden sind die Parameter nahezu stationär.

Die Parameter des linken Polynommatrixquotienten gemeinsam mit den invarianten Nullstellen der Polynommatrizen $\underline{\underline{A}}(z)$ und $\underline{\underline{B}}(z)$ sind in Tabelle 6.1.2.1 angegeben.

$$\begin{aligned}
 a_{11}(z) &= 1.8976 \cdot 10^{-1} - 1.1119z + z^2 \\
 a_{12}(z) &= -8.3982 \cdot 10^{-3} + 5.2224 \cdot 10^{-2}z \\
 a_{21}(z) &= 6.2961 \cdot 10^{-1} - 9.3577 \cdot 10^{-1}z \\
 a_{22}(z) &= 1.8796 \cdot 10^{-1} - 8.5161 \cdot 10^{-1}z + z^2 \\
 b_{11}(z) &= -4.0707 \cdot 10^{-2} - 4.4736 \cdot 10^{-3}z \\
 b_{12}(z) &= 1.4241 \cdot 10^{-1} + 9.3622 \cdot 10^{-3}z \\
 b_{21}(z) &= 2.9041 \cdot 10^{-1} + 1.0865 \cdot 10^{-1}z \\
 b_{22}(z) &= 1.3695 \cdot 10^{-1} + 1.4526 \cdot 10^{-2}z
 \end{aligned}$$

Pole			Nullstellen		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	.459601	.194988	1	-15.0388	0.00000
2	.459601	-.194988	2	-2.88374	0.00000
3	.193003	0.00000			
4	.851325	0.00000			

Tabelle 6.1.2.1 Parameter, Pole und Nullstellen des Modells 4. Ordnung

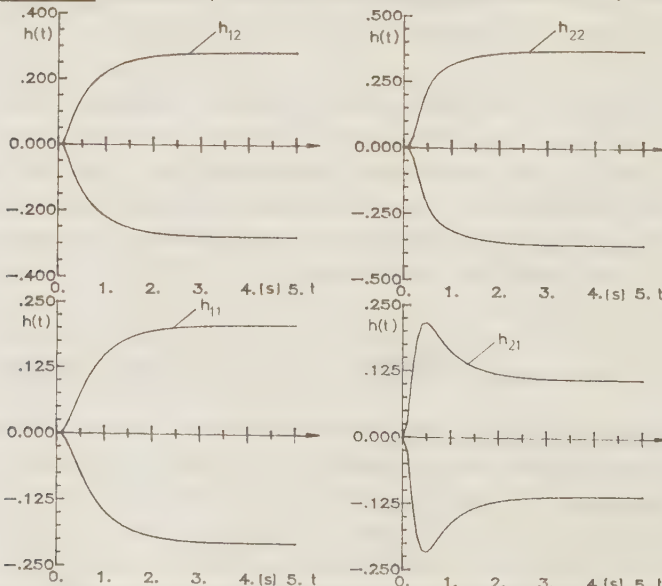


Bild 6.1.2.2 Simulierte Übergangsfunktionen des Modells 4. Ordnung

Bild 6.1.2.2 zeigt, daß durch dieses Modell geringer Ordnung das Verhalten der Regelstrecke sehr gut approximiert wird. Zum besseren Vergleich mit den gemessenen Sprungantworten der Regelstrecke in Bild 6.1.1.3 sind auch in Bild 6.1.2.2, obwohl für ein lineares Modell natürlich keine Richtungsabhängigkeit besteht, die Sprungantworten für negative und positive Eingangsgrößen dargestellt.

Der Polynommatrixquotient nach Tabelle 6.1.2.1, wurde für die Synthese des P-Reglers, des PI-Reglers und des Folgeregler für sprungförmige und sinusförmige Referenzsignale benutzt. Für den Entwurf eines entkoppelnden Reglers nach Abschnitt 5.4 wird ein Regelstreckenmodell mit diagonalen Nennerpolynommatrix benötigt. Dies kann erzielt werden, indem man die Schätzung mit jeweils einer Ausgangsgröße vornimmt. Mit den Teilsystemordnungen $v_1=2$ und $v_2=3$ ergibt sich gemäß Tabelle 6.1.2.2 ein Modell fünfter Ordnung.

$$\begin{aligned}
 P_{11}(z) &= 2,7189 \cdot 10^{-1} - 1,1567E z + z^2 \\
 P_{22}(z) &= -8,2740 \cdot 10^{-2} + 4,6754 \cdot 10^{-1} z - 1,2821 z^2 + z^3 \\
 Q_{11}(z) &= -7,0281 \cdot 10^{-2} - 1,2604 \cdot 10^{-3} z \\
 Q_{21}(z) &= -5,8047 \cdot 10^{-1} + 5,2770 \cdot 10^{-1} z + 7,7788 \cdot 10^{-2} z^2 \\
 Q_{12}(z) &= 1,2558 \cdot 10^{-1} + 9,6896 \cdot 10^{-3} z \\
 Q_{22}(z) &= -5,4624 \cdot 10^{-2} + 2,2130 \cdot 10^{-1} z + 1,3424 \cdot 10^{-2} z^2
 \end{aligned}$$

Pole			Nullstellen		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	.328180	0.00000	1	-11,8583	0.00000
2	.828484	0.00000	2	-9.88765	0.00000
3	.218810	.223831	3	.849212	0.00000
4	.218810	-.223831			
5	.844474	0.00000			

Tabelle 6.1.2.2 Parameter, Pole und Nullstellen des Modells 5. Ordnung

Auf Grundlage der in diesem Abschnitt angegebenen Modelle wurden die im nächsten Abschnitt diskutierten Regler entworfen.

6.1.3. Diskussion der Regelergebnisse

Ein Entwurfszyklus läuft hauptsächlich zwischen Entwurfs- und Simulationsprogramm ab, bis eine den Referenzsignalen angemessene Antwort des geschlossenen Regelkreises vorliegt. Für den Turbogeneratorsatz wurden quadratisch optimale Regler entworfen, wobei die Bewertungsmatrizen für die Spektralfaktorisierung nach Kapitel 5.4 solange interaktiv verändert wurden, bis die in der Simulation ermittelte Regelgüte in Bezug auf Anregelzeit, maximales Überschwingen und Ausregelung von Störsignalen angemessen war. Erst wenn das Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises zufriedenstellend war, wurden zur Anpassung des Reglerentwurfs an die Gegebenheiten der realen Anlage die Aufschaltmatrizen für Sollwerte $\underline{U}_w$ und Ausgangsstörungen $\underline{U}_{zy}$ nach Abschnitt 5.2.3 festgelegt. Der durch Simulation validierte Regler wurde dann an der realen Regelstrecke eingesetzt.

Simulationsergebnisse sollen in dieser Arbeit nicht angegeben werden. Trotzdem soll die theoretisch erreichte Regelgüte der einzelnen Regler anhand des in der Simulation ermittelten Gütekriteriums

$$I(k) = \sum_{i=0}^k \underline{e}^T(i) \underline{e}(i) \quad (6.1.3.1)$$

tabellarisch miteinander verglichen werden. In Tabelle 6.1.3.1 sind die Werte des Gütekriteriums, Gl. (6.1.3.1), für die einzelnen erprobten Regler, jeweils für sprungformige Sollwertänderungen und für Störsprünge am Ein- und Ausgang der Regelstrecke zusammengefasst. Der proportionale Regler zeigte in der Simulation das beste Führungsverhalten. Wie der nächste Abschnitt belegt, ist das Führungsverhalten dieses Reglers im praktischen Einsatz nicht annehmbar.

Da die Auflistung aller Reglerparameter zu umfangreich ist, werden zu den in den folgenden Abschnitten diskutierten Reglern in Anhang A6 zumindestens die Bewertungsmatrizen und die Pole des geschlossenen Regelkreises angegeben, um die Ergebnisse nachvollziehbar zu machen.



Bild 6.1.3.1.1 Echtzeitregelung des Turbogenerators, Führungsverhalten
P-Regler

links : sprungförmige Sollwertänderung $w_1 = 0.2$
rechts: sprungförmige Sollwertänderung $w_2 = 0.1$

Signal	P-Regler	PI-Regler	Folgeregler für Sinus und Sprung	entkop- pelnder PI-Regler
$\underline{w} = [1 \ 0]^T$	2.537	3.136	7,285	3.196
$\underline{w} = [0 \ 1]^T$	1.945	1.987	3.569	2.689
$\underline{z}_u = [1 \ 0]^T$	(12.74)*	1.506	2.296	2.314
$\underline{z}_u = [0 \ 1]^T$	(52.45)*	1.627	2.152	3.059
$\underline{z}_y = [1 \ 0]^T$	(32.23)*	2.569	4.329	3.169
$\underline{z}_y = [0 \ 1]^T$	(5.245)*	1.949	2.873	2.682

Tabelle 6.1.3.1 Werte des Gütekriteriums $I = \sum e^T e$ für die
Simulationsdauer 4 Sekunden ()* bleibende Regelabweichung)

6.1.3.1 Der proportionale Regler

Der P-Zustandsregler mit Beobachter liefert zwar in der Simulation ein sehr gutes Führungsverhalten, er ist jedoch nicht in der Lage, Störungen auszuregulieren oder bei ungenau bekannten Parametern der Regelstrecke den Sollwert stationär genau zu erreichen. Dies wirkt sich besonders bei einem stark nichtlinearen System wie dem Turbogenerator fatal aus.

Bild 6.1.3.1.1 zeigt die gemessenen Antworten von Drehzahl und Spannung auf Sollwertsprünge. Erstaunlich gut ist noch die gemessene Antwort auf einen Sollwertsprung $\underline{w} = [0.2 \ 0]^T$. Der Sollwert der Drehzahl wird ohne große Regelabweichung erreicht. Die durch die Einkopplung verursachte Abweichung der Spannung ist gering. Dies Ergebnis ist damit zu begründen, daß das Regelstreckenmodell für die Übertragungsfunktionen $g_{11}(z)$ und $g_{12}(z)$ gut mit der Realität übereinstimmt und der Turbogeneratorsatz sich nahezu linear verhält. Im Gegensatz dazu wurde der mit dem P-Zustandsregler geregelte Kreis für das Führungssignal $\underline{w}=[0 \ 0.2]^T$ sogar instabil. Für $\underline{w}=[0 \ 0.1]^T$ blieb der Regelkreis, wie Bild 6.1.3.1.1 zwar stabil, es zeigte sich aber, wie Bild 6.1.3.1.1 belegt, eine enorme Regelabweichung für die Drehzahl. Offenbar ist die Spannung des Turbogenerators wegen der stark ausgeprägten Nichtlinearität mit proportionalen Stellgesetzen nur sehr schwer zu regeln. Alle simulierten und gemessenen

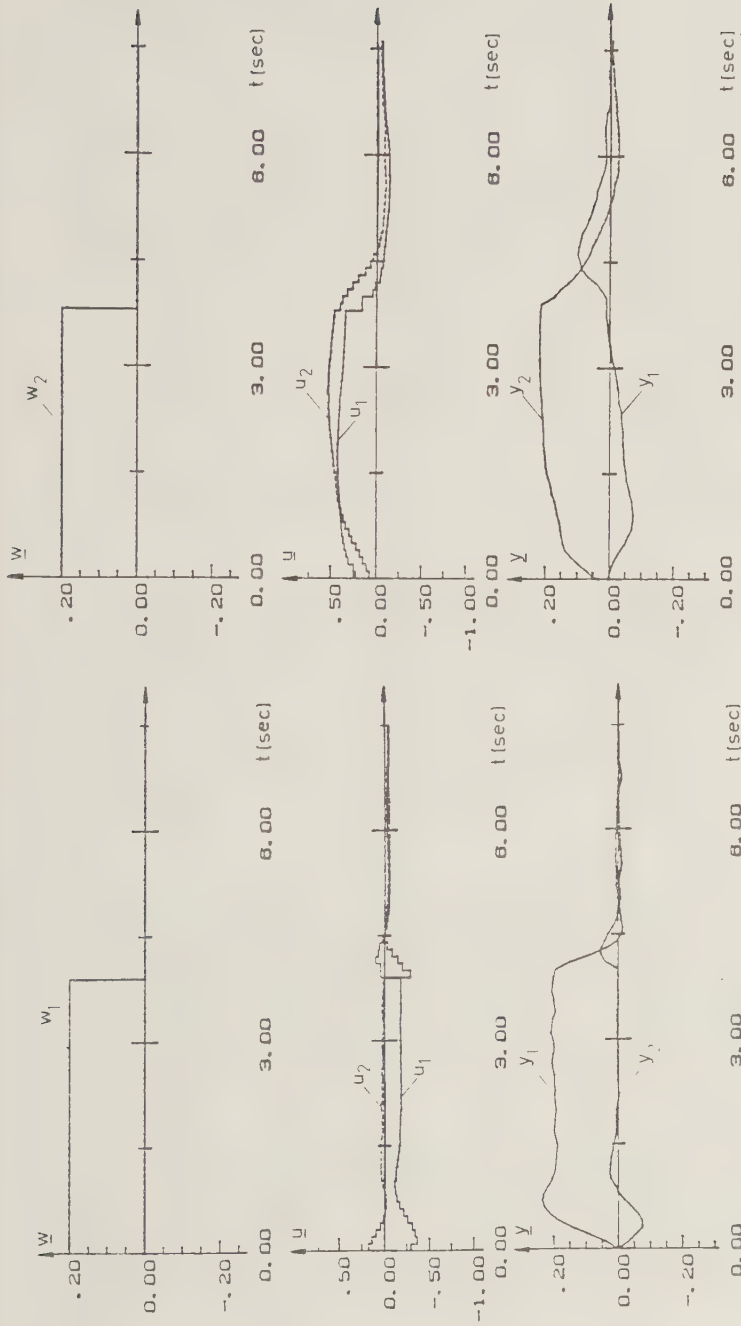


Bild 6.1.3.2.1 Echtzeitregelung des Turbogenerators, Führungsverhalten

PI-Regler

links: sprungförmige Sollwertänderung $w_1 = 0.2$

rechts: sprungförmige Sollwertänderung $w_2 = 0.2$

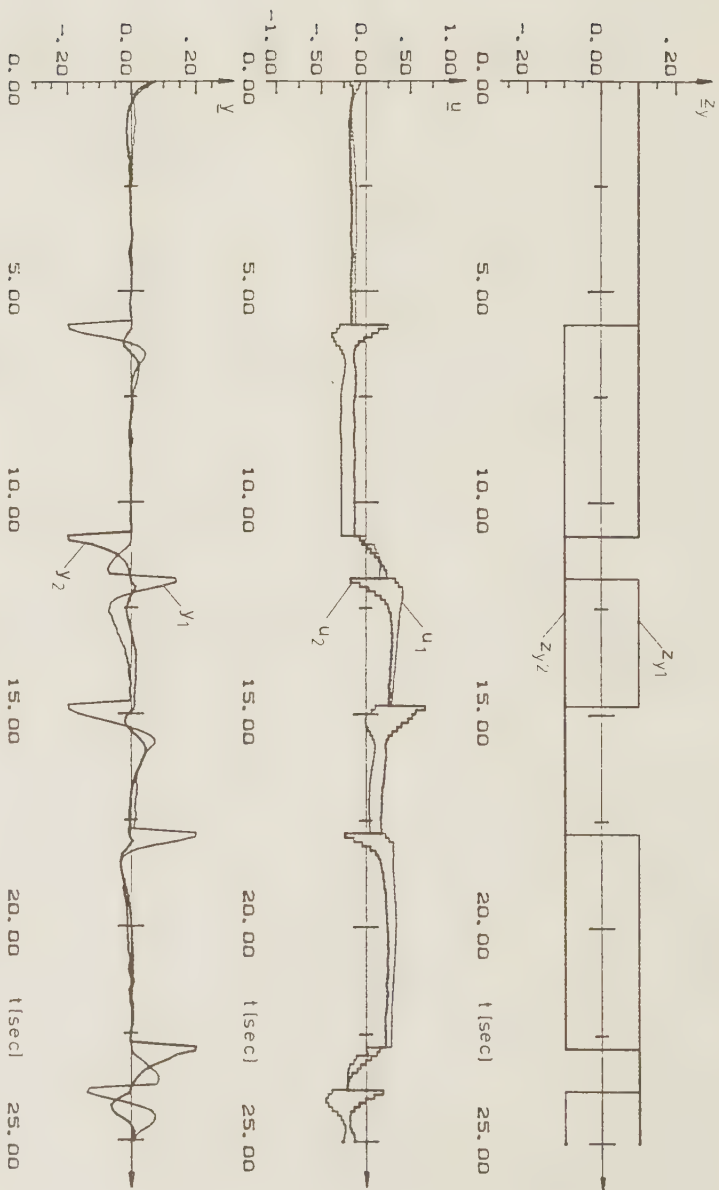


Bild 6.1.3.2.2

Echtzeitregelung des Turbogenerators, Störverhalten

PI-Regler

Ausgangsstörung z_{y1} : PRBS-Signal mit Amplitude 0.1, Impulssbreite 3 s

Ausgangsstörung z_{y2} : PRBS-Signal mit Amplitude 0.1, Impulssbreite 3 s

Störübergangsfunktionen sind nicht akzeptabel und führen in der Echtzeitregelung teilweise sogar zur Instabilität des Regelkreises. Die gleiche Bewertung gilt auch für Arbeitspunktwechseln.

6.1.3.2 Der PI-Regler

PI-Regler sind allgemein bekannt für ihr robustes Verhalten hinsichtlich unmodellierter Dynamik der Regelstrecke. Solche Parameterungenauigkeiten können im eingeschwungenen Zustand auf annähernd sprungförmige Ausgangsstörungen zurückgeführt werden. Solange der geschlossene Regelkreis stabil bleibt, erreicht die Regelgröße asymptotisch den Sollwert. Der PI-Regler ist im Gegensatz zum P-Regler in der Lage, den Sollwert auch in unterschiedlichen Arbeitspunkten ohne bleibende Regelabweichung einzuhalten.

Das Bild 6.1.3.2.1 zeigt die Antwort auf eine sprungförmige Änderung der Führungsgröße, in Bild 6.1.3.2.1 ist das Störverhalten für Störsprünge am Ausgang dokumentiert.

Die simulierten Führungsübergangsfunktionen des Regelkreises mit PI-Regler waren, wie Tabelle 6.1.3.1 zeigt, wegen der höheren Reglerordnung von geringerer Güte als die des P-Zustandsreglers. In den Störübergangsfunktionen des geschlossenen Regelkreises zeigt sich aber die Überlegenheit dieser Regelstruktur. Bereits nach ca 500 ms sind Ausgangsstörungen zu 90% ausgegeregelt. Bei Eingangsstörungen ist die Ausregelzeit etwas höher, da das Störsignal erst über die Regelstrecke laufen muß, bevor der Regler reagieren kann.

Die gemessene Antwort auf einen Drehzahlollwertsprung $\underline{w} = [0.2 \ 0]^T$ stimmt in etwa mit der Simulation überein. Dagegen tritt bei einer sprungförmigen Änderung des Spannungssollwertes $\underline{w} = [0 \ 0.2]^T$ eine starke Verkopplung mit der Drehzahl auf, wie Bild 5.2.2.1 zeigt. Wegen der starken Nichtlinearität - es tritt ein Vorzeichenwechsel der stationären Verstärkung auf - wird die Störung erst nach ca. 3 s ausgegeregelt, wobei die stationären Endwerte der Stellgrößen deutlich von den in der Simulation ermittelten Endwerten differieren.

Eingangs- und Ausgangsstörungen werden nach Bild 6.1.3.2.2 durch den PI-Regler auch an der realen Anlage sehr gut ausgegeregelt. In anderen Arbeitspunkten und bei Lastwechseln bleibt der Regelkreis ebenfalls stabil. Der PI-Zustandsregler zeigt von allen entworfenen Reglern das beste Übergangsverhalten.



Bild 6.1.3.3.1

Echtzeitregelung des Turbogenerators, Störverhalten

Regler mit Stör- und Führungsmodell für Sinus und Sprung

Eingangsstörung $z_{u1} = 0.5 \sin(\omega_0 t)$

6.1.3.3 Folgeregler für sprungförmige und sinusförmige Signale

Der Folgeregler wurde für sinusförmige Störungen und Sollwerte mit einer Periode von 2 Sekunden ausgelegt. Die charakteristischen Polynome für das diskretisierte Sinussignal und den Sprung lauten

$$p_{s1}(z) = z - 1$$

$$p_{s2}(z) = z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1, \text{ mit } \omega_0 = \pi \text{ s}^{-1}, T = 0.1 \text{ s}.$$

Damit ergibt sich die charakteristische Polynommatrix des diskreten Störmodells zu

$$\underline{S}(z) = \begin{bmatrix} (z-1)(z^2-1.902z+1) & 0 \\ 0 & (z-1)(z^2-1.902z+1) \end{bmatrix}.$$

In der Simulation werden sinusförmige Testsignale, unabhängig davon ob sie als Führungssignal, Ein- oder Ausgangsstörung in den Regelkreis eingreifen, in weniger als einer Periode ausgeregelt. Dieses ideale Verhalten gilt nicht für die Regelung der realen Anlage. Bild 6.1.3.3.1 zeigt die Antwort von Drehzahl und Spannung auf eine sinusförmige Erregerstromstörung mit der Amplitude 0.5. Sinusförmige Störungen am Regelstreckeneingang werden asymptotisch durch den Regler vollständig kompensiert. Die Erhöhung der Ausregelzeit gegenüber der Simulation ist vor allem durch die Anregung sinusförmiger Ausgangssignale höherer Frequenz bedingt, was auf die nichtlineare Charakteristik der Regelstrecke zurückgeführt werden kann.

Das Verhalten des geschlossenen Regelkreises für eine sinusförmige Ausgangsstörung der Spannung zeigt Bild 6.1.3.3.2. Die Grundwelle dieser Störung wird nahezu vollständig ausgeregelt, dafür tritt aber wegen der Nichtlinearität der Regelstrecke eine starke Oberwellenstörung mit der Frequenz der ersten Harmonischen für die Drehzahl auf. Da die Störung zum großen Teil unterdrückt wird, sind Folgeregler selbst bei stark nichtlinearen Systemen wie dem Turbogenerator einsetzbar.



Bild 6.1.3.3.2

Echtzeitregelung des Turbogenerators, Störverhalten
 Regler mit Stör- und Führungsmodell für Sinus und Sprung
 Ausgangsstörung $z_{y2} = 0.2 \sin(\omega_0 t)$

6.1.3.4 Der entkoppelnde PI-Regler

Der entkoppelnde Regler wurde nach dem im Abschnitt 5.3 formulierten Verfahren mit dem Regelstreckenmodell 5. Ordnung nach Abschnitt 6.1.2 entworfen. Das Entkopplungsnetzwerk und die für Entwurf des Reglers gewählten Gewichtungen sind in Anhang A6 angegeben.

Die Wahl der Bewertungsmatrizen ist bei diesem Regler einfacher als bei den Entwürfen der vorangehenden Abschnitte, da die erweiterte Regelstrecke eine diagonale Übertragungsmatrix besitzt und damit auch die Gewichtungen unabhängig voneinander gewählt werden können. Der Regler kann somit durch die Syntheseverfahren für Eingroßenregelstrecken nach [Y3] erhalten werden.

Bild 6.1.3.4.1 zeigt die gemessenen Antworten des geschlossenen Regelkreises für sprungförmige Änderungen der Führungsgröße. Unter den idealen Bedingungen der Simulation waren die Ausgangsgrößen für Führungs- und Störverhalten vollständig dynamisch entkoppelt. An der realen Regelstrecke treten bedingt durch die Modellungenauigkeiten zwar Kopplungen auf, diese sind aber weniger stark ausgeprägt als beim PI-Regler. Im übrigen zeigen die Sprungantworten des geschlossenen Regelkreises qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie die Regelergebnisse nach Abschnitt 6.1.3.2. Die Ausregelzeit ist für den entkoppelnden Regler allerdings geringfügig größer.

In Abschnitt 5.4 wurde als Vorteil der Entkopplung durch Aufschaltung der Stellgröße über die adjungierte Zählerpolynommatrix gegenüber anderen Methoden, welche die Nullstellen des Regelkreises durch Pole kompensieren, die Unempfindlichkeit hinsichtlich Parameterungenauigkeiten des Entwurfmodells herausgestellt. Diese Aussage wird durch das Verhalten des geschlossenen Regelkreises bei einem Wechsel der Last zwischen den Werten 1.8Ω und 2.8Ω nach Bild 6.1.2.4.1 belegt.

Insgesamt bringt der entkoppelnde PI-Zustandsregler, betrieben an einer nichtlinearen Regelstrecke wie dem Turbogenerator, kaum Vorteile gegenüber dem PI-Mehrgrößenregler. Sein Einsatz wird dadurch attraktiv, daß das Entkopplungsnetzwerk sehr einfach zu bestimmen ist und der eigentliche Reglerentwurf für Eingroßenregelstrecken durchgeführt werden kann.



Bild 6.1.3.4.1

Echtzeitregelung des Turbogenerators, Führungsverhalten
entkoppelter PI-Regler

links : sprungförmige Sollwertänderung $W_1 = 0.2$

rechts: sprungförmige Sollwertänderung $W_2 = 0.2$



Bild 6.1.3.4.2 Echtzeitregelung des Turbogenerators, Störverhalten
entkoppelter PI-Regler
Lastwechsel $2.8 \Omega \leftrightarrow 1.8 \Omega$

6.2 Simulation der Regelung eines Einschnecken-Extruders

Um zu zeigen, daß die Entwurfsverfahren auch für Systeme mit mehr als zwei Ein- und Ausgangsgrößen einsetzbar sind, soll in diesem Abschnitt für das in [B4] angegebene Modell eines Kunststoff-Extruders ein Mehrgrößen-PI-Regler entworfen werden. Dieses Modell ist mit Eingrößenmethoden aus gemessenen Sprungantworten erstellt worden, woraus sich eine Mehrgrößenbeschreibung unnötig hoher Ordnung ergibt. Daher wird der Entwurf für ein reduziertes Modell durchgeführt, als Simulationsmodell für die Regelstrecke wird jedoch die Originalbeschreibung nach [B4] beibehalten. Da alle Eigenwerte des Systems reell sind und sogar in der diskreten Beschreibung sämtliche Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen, ist die Regelaufgabe recht trivial, so daß nach der Beschreibung des Modells im ersten Unterabschnitt die Diskussion der Simulationsergebnisse im zweiten Unterabschnitt kurz gehalten wird.

6.2.1 Das Modell des Kunststoffextruders

Bei dem Extruder handelt es sich, wie Bild 6.2.1.1 zeigt, um ein System mit vier Heizzonen und einer Förderschnecke. Da der Einfluß der ersten beiden Heizzonen auf die für die Produktqualität entscheidende Massetemperatur am Ende der Schnecke gering ist, wird dieser Systemanteil vernachlässigt. Als Ausgangsgrößen werden die Temperaturen der letzten beiden Heizzonen T_3 und T_4 , sowie die Massetemperatur T_M betrachtet. Eingangsgrößen sind die beiden Heizspannungen h_3 und h_4 der Heizzonen drei und vier und die Solldrehzahl w_n der Schnecke.

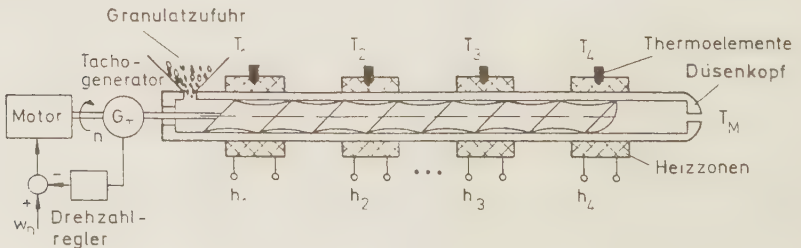


Bild 6.2.1.1 Schematisches Diagramm der Regelstrecke

Damit ergibt sich als Blockschaltbild der Regelstrecke das in Bild 6.2.1.2 dargestellte vereinfachte Modell des Extruders. Alle Teilübertragungsfunktionen dieses Systems sind PT_1 -Glieder, deren Zeitkonstanten und Verstärkungsfaktoren in Anhang A7 angegeben sind. Hierbei wurden die Größen U_1 , U_2 und N aus [B4] in folgender Form normiert: T_i in Minuten, $h_3 = U_1/100$, $h_4 = U_2/100$, $w_n = 4 N$.

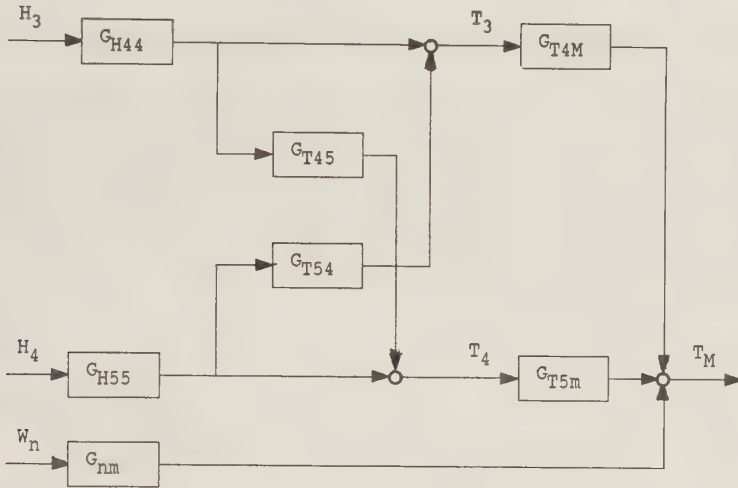


Bild 6.2.1.2 Blockschaltbild des vereinfachten normierten Extrudermodells

Nach Bild 6.2.1.2 kann die Übertragungsmatrix der Regelstrecke zu

$$\begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{H44} & G_{T45} G_{H55} & 0 \\ G_{T45} G_{H44} & G_{H55} & 0 \\ (G_{T4M} + G_{T5M} G_{T45}) G_{H44} & (G_{T4M} G_{T45} + G_{T5M}) G_{H55} & G_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_3 \\ H_4 \\ w_n \end{bmatrix} \quad (6.2.1.1)$$

bestimmt werden, wobei aus Gründen der übersichtlichen Darstellung der Parameter s fortgelassen wurde.

Da die einzelnen PT_1 -Übertragungsfunktionen sehr unterschiedliche Zeitkonstanten besitzen, nach Tabelle A7.1 gilt $T_{S1}/T_{S7} = 60$, ist die Wahl der Abtastzeit schwierig. Einerseits sollte die Abtastzeit kürzer sein, als die kleinste Zeitkonstante des Systems, andererseits darf sie auch nicht zu

klein gewählt werden, weil sich sonst die numerische Kondition der Systembeschreibung für die Reglersynthese, bedingt durch die Pole nahe am Einheitskreis, erheblich verschlechtern wird. Als Kompromiß wurde eine Abtastzeit von 30 Sekunden gewählt. Die Beschreibung des vollständigen diskretisierten Systems in Form eines rechten Polynommatrixquotienten ist in Anhang A7 angegeben.

6.2.2 Entwurf eines PI-Zustandsreglers für ein reduziertes Modell

Da die Zeitkonstanten T_5 und T_6 des Massetemperaturmodells nach Anhang A7 klein gegenüber den Zeitkonstanten des Temperaturzonenmodells sind, können diese in den Übertragungsfunktionen von u_1 bzw u_2 zur Massetemperatur T_M vernachlässigt werden. Die Übertragungsfunktionen G_{T4M} und G_{T5M} werden also für den Entwurf durch ihre konstanten Verstärkungen K_5 und K_6 ersetzt. Da der PI-Regler unempfindlich gegenüber unmodellierter Dynamik ist, wird der Entwurf für das reduzierte Modell

$$\begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{H44} & G_{T54} G_{H55} & 0 \\ G_{T45} G_{H44} & G_{H55} & 0 \\ (K_5 + K_6 G_{T45}) G_{H44} & (K_5 G_{T54} + K_6) G_{H55} & G_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_3 \\ H_4 \\ W_n \end{bmatrix} \quad (6.2.2.1)$$

durchgeführt. Dieses Modell kann durch Bilden der Spaltenhauptnenner sofort als minimaler rechter Polynommatrizenquotient 5. Ordnung dargestellt werden. Die Parameter des diskretisierten Entwurfsmodells sind in Tabelle 6.2.2.2 angegeben.

Nr.	Pole	Nullstellen
1	.548618	.986813
2	.975953	.974157
3	.985412	
4	.989596	
5	.988883	

Tabelle 6.2.2.1 Pole und Nullstellen des reduzierten Modells 5. Ordnung

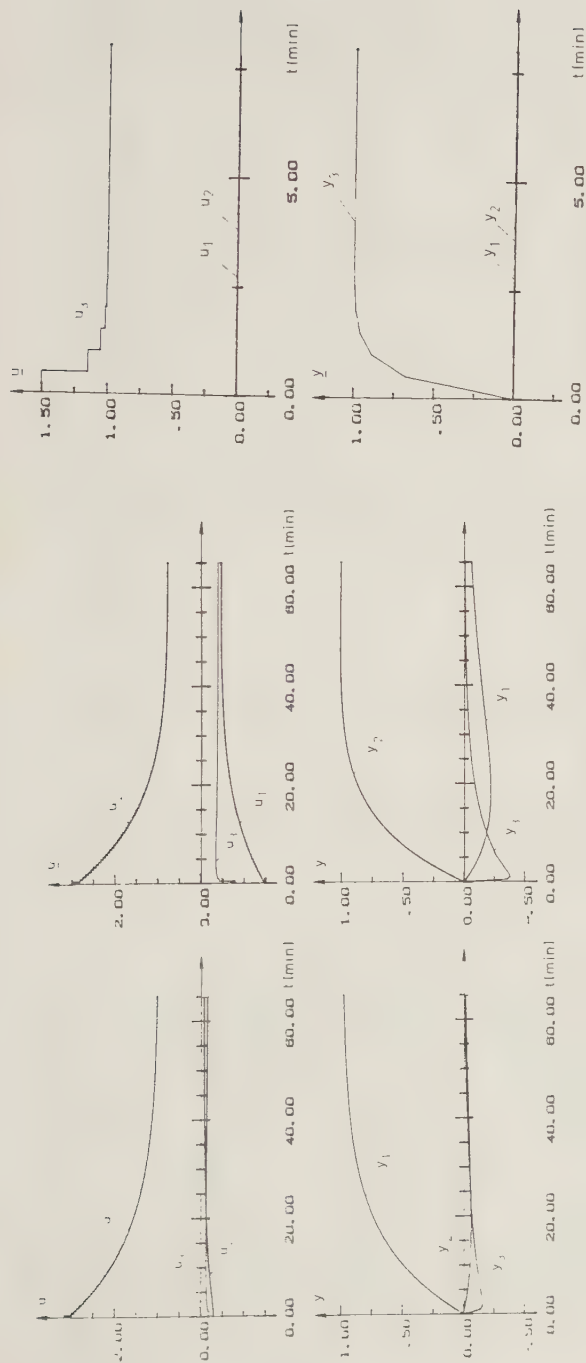


Bild 6.2.2.1 Simulation der Regelung des Kunststoffextruders, Führungsverhalten

PI-Regler

links : sprungförmige Sollwertänderung $w_1 = 1.0$

Mitte : sprungförmige Sollwertänderung $w_2 = 1.0$

rechts: sprungförmige Sollwertänderung $w_3 = 1.0$

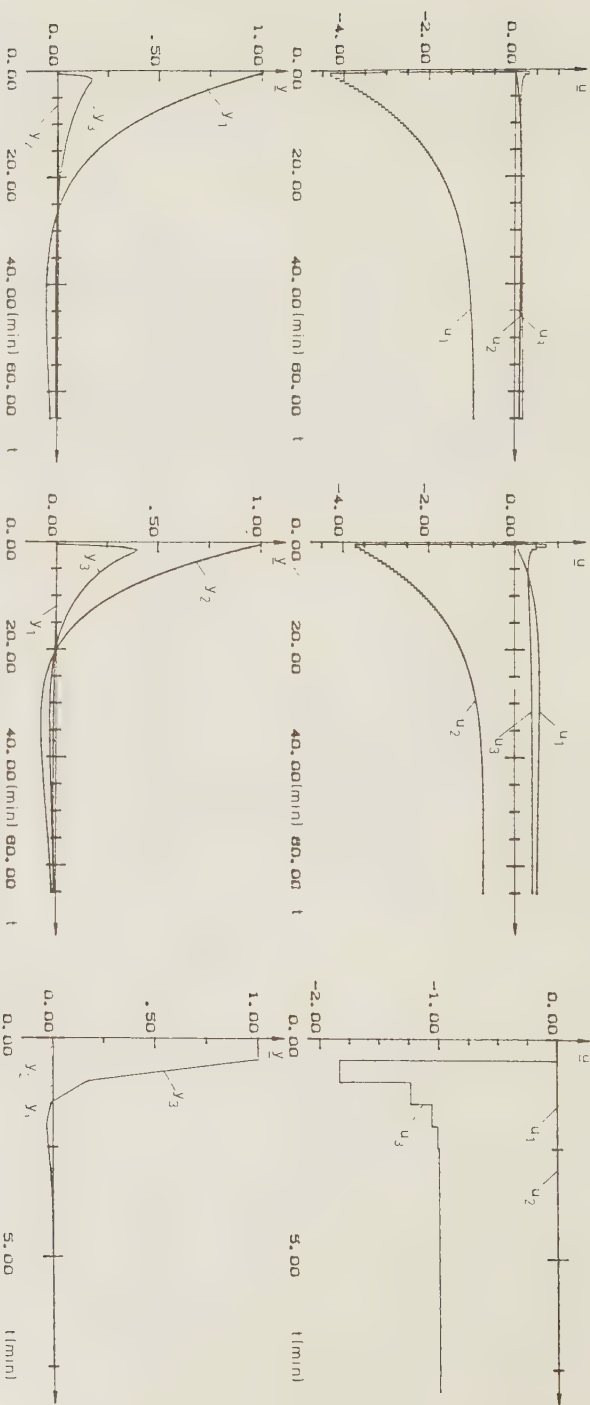


Bild 6.2.2.2

Simulation der Regelung des Kunststoffextruders, Störverhalten
PI-Regler

links : sprungförmige Ausgangsstörung $z_{y1} = 1.0$

Mitte : sprungförmige Ausgangsstörung $z_{y2} = 1.0$

rechts: sprungförmige Ausgangsstörung $z_{y3} = 1.0$

$$P_{11}(z) = 7.8382 - 1.5950 \cdot 10^1 z + 8.1137 z^2$$

$$P_{22}(z) = 5.8552 - 1.1864 \cdot 10^1 z + 6.0101 z^2$$

$$P_{33}(z) = -1.2156 + 2.2158 z$$

$$Q_{11}(z) = -8.4564 \cdot 10^{-2} + 8.6658 \cdot 10^{-2} z$$

$$Q_{21}(z) = 1.1499 \cdot 10^{-4} + 1.1632 \cdot 10^{-4} z$$

$$Q_{31}(z) = -1.4330 \cdot 10^{-2} + 1.4778 \cdot 10^{-2} z$$

$$Q_{12}(z) = 3.1273 \cdot 10^{-4} + 3.1546 \cdot 10^{-2} z$$

$$Q_{22}(z) = -8.7471 \cdot 10^{-2} + 8.8793 \cdot 10^{-2} z$$

$$Q_{32}(z) = -3.4935 \cdot 10^{-2} + 3.5571 \cdot 10^{-2} z$$

$$Q_{13}(z) = 0.0$$

$$Q_{23}(z) = 0.0$$

$$Q_{33}(z) = 1.0$$

Tabelle 6.2.2.2 Parameter des rechten Polynommatrixquotienten des reduzierten Modells 5. Ordnung

Da die Zeitkonstanten des Temperaturzonenmodells, verglichen mit der gewählten Abtastzeit, groß sind, liegen nach Tabelle 6.2.2.1 fast alle Pole des diskreten Modells nahe am Einheitskreis der z -Ebene. Bei dem Versuch, für dieses System einen quadratisch optimalen Regler zu berechnen, hat sich gezeigt, daß der Spektralfaktorisierungsalgorithmus sehr schlecht konvergiert, wenn viele Pole des geschlossenen Regelkreises nahe am Einheitskreis liegen. In den meisten Fällen lieferte die Spektralfaktorisierung eine charakteristische Polynommatrix $\underline{E}(z)$ bzw. $\underline{N}(z)$, die auch Pole außerhalb des Einheitskreises enthielt. Erst kleinere Gewichtungsfaktoren für die Stellgröße lieferten numerisch richtige Ergebnisse, jedoch sind die auf Grundlage dieser Bewertungsmatrizen entworfenen Regler wegen ihrer unrealistisch großen Stellgrößen nicht für diese Regelstrecke einsetzbar.

Deshalb wurde auf einen quadratisch optimalen Entwurf verzichtet. Der PI-Regler wurde stattdessen direkt mittels Polynommatrizenvorgabe entworfen. Die Wahl der charakteristischen Polynommatrix ist in diesem Fall auch be-

sonders einfach, da die Nennerpolynommatrix des reduzierten Modells nach Tabelle 6.2.1.2 Diagonalstruktur besitzt.

Die charakteristischen Polynommatrizen des geschlossenen Regelkreises und des Beobachters sind gegeben durch

$$\underline{E}(z) = \text{diag} \left[(z-0.975)(z-0.97)z \quad (z-0.975)(z-0.98)z \quad (z-0.35)z \right]$$

$$\underline{N}(z) = \text{diag} \left[(z-0.975) \quad (z-0.98) \quad (z-0.35) \right] .$$

Bei der Polynommatrizenvorgabe entstehen keine numerischen Probleme, wenn die Genauigkeitsschranke zur Bestimmung der Basis des Nullraums in der Lösung der diophantischen Gleichung nach Abschnitt 3.3 angemessen gewählt wird. Für eine Nulltoleranz von $e_{\max} = 10^{-5}$ wird das Entwurfsmodell nochmals um einen schwach steuerbaren Anteil zweiter Ordnung reduziert, so daß der unterlagerte proportionale Zustandsregler mit Beobachter praktisch für eine reduzierte Regelstrecke dritter Ordnung bestimmt wurde.

Bild 6.2.2.1 zeigt die Antwort des geschlossenen Regelkreises auf sprunghafte Änderungen der Führungsgrößen. Insbesondere am Verlauf der Stellgrößen ist die schwache Kopplung der Temperaturzonen untereinander zu erkennen. Die Massetemperatur kann, wenn ihr als Stellgröße die Drehzahl der Schnecke zugeordnet wird, als völlig entkoppelt betrachtet werden.

Bild 6.2.2.2 demonstriert das Störverhalten des Regelkreises. In der Simulation wurden sprunghafte Ausgangsstörungen auf die Zonentemperaturen und die Massetemperatur aufgeschaltet. Die Massetemperatur wird in nur fünf Stellschritten auf ihren stationären Wert ausgeregelt. Die Auswirkung von Störungen der Zonentemperaturen auf die Massetemperatur sind größer als beim Führungsverhalten, doch werden alle Störsignale in Hinsicht auf die Zeitkonstanten des offenen Regelkreises schnell ausgeregelt.

Zusammenfassend kann für die Regelung des Kunststoffextruders ausgesagt werden, daß durch einen Mehrgrößenansatz ein einfaches Regelproblem für diese Anlage formuliert werden kann, das selbst mit einem auf der Grundlage eines stark reduzierten Modells durch Polynommatrizenvorgabe entworfenen PI-Regler gelöst werden kann.

7. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ausgehend von bekannten kanonischen Beschreibungsformen für Mehrgrößensysteme durch Quotienten von Polynommatrizen, Synthesemethoden zu entwickeln, die unter Ausnutzung struktureller Eigenschaften der Systembeschreibung parameterminimale Regelalgorithmen liefern. Der Entwurf sollte unter Verwendung von erprobten Methoden der numerischen linearen Algebra durchgeführt werden. Der geschlossene Regelkreis sollte Unempfindlichkeit gegenüber Ungenauigkeiten des Entwurfmodells besitzen.

Die angegebenen Forderungen schlossen von vornherein den Einsatz gängiger Regelstrategien des Polynommatrixentwurfs, wie Modellfolge, Regelung mit endlicher Einstellzeit und Minimumvarianzregelung aus, da diese Kompensationsregelalgorithmen ein möglichst exaktes Modell der Regelstrecke benötigen. Auch die übliche Entwurfsmethodik, welche zur Lösung der Synthesegleichungen elementare Äquivalenztransformationen für Polynommatrizen ausnutzt, konnte nicht verwendet werden, da diese Vorgehensweise numerisch unattraktiv ist und nur für gut konditionierte Probleme geringer Dimension eingesetzt werden kann.

Daher wurden in Kapitel 3 grundlegende Algorithmen für Analyse- und Synthesprobleme unter vollständigem Verzicht auf die Manipulation von Polynommatrizen durch elementare Transformationen formuliert. Im einzelnen wurden numerische Methoden für die Berechnung von Primmatrixprodukten aus der Zustandsraumdarstellung, die Bestimmung von größten gemeinsamen Teilern, die Lösung von Polynommatrixgleichungen, die Spektralfaktorisierung von parahermiteschen Polynommatrizen und die Berechnung von invarianten Nullstellen angegeben. Einige der aufgezählten Verfahren sind in Teilaspekten bereits in der regelungstechnischen Literatur angegeben worden, so daß hier der durch diese Arbeit geleistete Beitrag noch einmal herausgestellt werden soll. Die Hermite-Form eines Polynommatrixquotienten und die dazu struktureisomorphe Steuerbarkeitsnormalform mit einseitiger Kopplung sind seit langem bekannt, neu ist der direkte Zugriff auf die Strukturinformation der kanonischen Zustandsraumdarstellung und die direkte Berechnung der Koeffizienten der Zählerpolynommatrix. Bei der Bestimmung einer Teilerpolynommatrix durch Faktorisierung der aus den Systempolynommatrizen abgeleiteten Sylvester-Resultantenmatrix, konnte erst durch Ausnutzen der im Verlauf der Transformation entstehenden Redundanz, ein auch für Systeme großer Problemdimension anwendbares numerisches Verfahren formuliert werden. Bei

der Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung über die Realisierung in der Zustandsraumdarstellung wurde ein bekanntes, nicht unter numerischen Gesichtspunkten formuliertes Verfahren erst durch die hier entwickelte direkte Berechnung der Strukturmatrizen für einen rechnergestützten Entwurf einsetzbar. Neu ist hierbei auch die Möglichkeit, die Lösbarkeit während der Konstruktion der Lösung zu überprüfen. In der Lösung dieser Polynommatrixgleichung über eine Basis des Nullraums der Systempolynommatrizen konnte durch den Einsatz eines sequentiellen QR-Algorithmus eine erhebliche Verbesserung der numerischen Leistungsfähigkeit gegenüber in der Literatur angegebenen Verfahren, die den Gauß-Algorithmus oder die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung nutzen, erzielt werden. Für die Lösung der bilateralen Gleichung wurde ein neues Verfahren vorgeschlagen, bei dem durch Bestimmung der größten gemeinsamen Teiler der Zeilen einer Systempolynommatrix das Problem auf mehrere entkoppelte unilaterale Gleichungen geringer Dimension zurückgeführt werden kann. Für die Bestimmung der invarianten Nullstellen einer Polynommatrix wurden zwar nur aus der Literatur bekannte Verfahren zur Regularisierung des zugehörigen Matrixbüschels und zur Berechnung seiner verallgemeinerten Eigenwerte benutzt, neu ist hierbei die Grundidee, die äquivalente Beschreibungsform für die Nullstellenberechnung auszunutzen. Da sich die in dieser Arbeit für Analyse und Synthese konzipierten Methoden nach Möglichkeit auf numerisch stabilisierte Verfahren der linearen Algebra stützen, besitzen die Algorithmen einen hohen Grad an Zuverlässigkeit. Fehlerhafte Ergebnisse werden nur für äußerst schlecht konditionierte Probleme erhalten.

Um eine Systembeschreibung direkt durch die Auswertung gemessener Ein- und Ausgangssignale des Systems erhalten zu können, wurde in Kapitel 4 ein Parameterschätzverfahren für die Koeffizienten eines linken Polynommatrixquotienten angegeben. In der Lösung der Schätzgleichungen wurde Wert darauf gelegt, daß ein der großen Anzahl von Parametern angemessenes Verfahren zum Einsatz kommt. Daher wurden die Parametervektoren direkt mittels einer orthogonalen Zerlegung der Meßwertmatrix berechnet, so daß das zu erheblichen Rundungsfehler führende Aufstellen der Normalengleichung unterbleiben konnte.

Als Regelstrategie wurde gemäß Kapitel 5 eine nach dem "Prinzip des internen Modells" um ein Führungs- und Störmodell erweiterte Zustandregelung mit Beobachter eingesetzt. Als Ausgangspunkt für die Entwicklung der Synthesemethodik im Frequenzbereich diente die Synthese des "robusten Servokompensators" in der Zustandsraumdarstellung, die jedoch vollständig für die Systembeschreibung mittels Polynommatrizen neu formuliert wurde. Hierbei

wurden zwei Synthesegleichungen erhalten, die mit den Methoden des dritten Kapitels effizient gelöst werden konnten. Die Festlegung der Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises geschieht durch Vorgabe von charakteristischen Polynommatrizen, die durch Minimierung quadratischer Gütekriterien bestimmt werden können. Deren Auswertung wird mittels Spektralfaktorisierung der gewichtet verknüpften Systempolynommatrizen durchgeführt. Durch die in der Beschreibung durch Polynommatrizen sehr einfach erkennbaren und auszunutzenden Freiheitsgrade können die Stellgrößen für Stör- und Führungsregelung gezielt beeinflusst werden.

Das vorgestellte Regelkonzept wurde an einer Laboranlage erprobt, hierbei konnten für alle Regelalgorithmen zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Weiterhin wurde der Einsatz der Regelstrategie für einen industriellen Kunststoffextruder im Rahmen von Simulationsstudien untersucht. Die hierbei erzielten Ergebnisse führen zu dem Schluß, daß durch den Einsatz einer Mehrgrößenregelung, auch wenn sie für ein stark reduziertes Modell entworfen wird, eine erhebliche Verbesserung der Regelgüte gegenüber konventionellen Regelmethoden erzielt werden kann. Aufgrund der rechnergestützten Auslegung kann auch für eine nichttriviale Regelstrecke, unterstützt durch interaktive Analyse-, Synthese- und Simulationsprogramme, schnell eine Einstellung des Reglers gefunden werden. Eine eventuell notwendige Nachjustierung des Reglers ist mit den Entwurfshilfsmitteln einfach durchführbar.

Eine Fortführung dieser Arbeit kann z.B. darin bestehen, durch "on-line" Auswertung der Entwurfsgleichungen das hier vorgeschlagene Konzept zu einer adaptiven Regelstrategie zu erweitern, was einem Ausbau des in [Y3] dargestellten adaptiven Verfahrens für die Regelung von Mehrgrößensystemen gleichkommt. Ein Schätzverfahren für Regelstreckenparameter liegt vor, weiterhin benötigen Spektralfaktorisierung und Auswertung der diophantischen Gleichungen eine geringe Rechenzeit, so daß ein Einsatz für verfahrenstechnische Regelstrecken, die Abtastzeiten im Bereich von Sekunden besitzen, möglich ist.

Literaturverzeichnis

- [A1] Ackermann, J.: Abtastregelung, Band II, Entwurf robuster Systeme. Springer Verlag, 1983.
- [A2] Anderson, B. D. O., K. L. Hitz und N. D. Diem: Recursive Algorithm for Spectral Factorization. IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-21, S. 742-414, 1974.
- [A3] Anderson, B. D. O.: An Algebraic Solution to the Spectral Factorization Problem. IEEE Trans. Automatic Control, AC-12, S. 410-414, 1967.
- [A4] Anderson, B.D.O. und E.I. Jury: Generalized Bezoutian and Sylvester Matrices in Multivariable Linear Control. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20, S. 551-556, 1976.
- [A5] Aplevich, J.D.: Direct Computation of Canonical Forms for Linear Systems by Elementary Matrix Operations. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 124, 1974.
- [A6] Aplevich, J.D.: Kronecker Decomposition of Linear Systems as a Foundation for Stable Minimization Algorithms. Proceedings of the IFAC Symposium on Computer Aided Design in Technological Systems, S. 169-176, 1982.
- [A7] Aplevich, J.D.: Time-Domain Input-Output Representation of Linear Systems. Automatica, 17, S. 509-522, 1981.
- [A8] Athans, M.: The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-16, No.6, December 1971.
- [B1] Barnett, S.: Polynomials and Linear Control Systems. Marcel Dekker, New York, 1983.
- [B2] Beghelli, S. und R. Guidorzi: A New Input-Output Canonical Form for Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21, S. 692-696, 1976.

- [B3] Bengtsson, G.: Output Regulation and Internal Models - A Frequency Domain Approach. Automatica, 13, S. 333-345, 1977.
- [B4] Bergemann, H.J.: Identifikation des Übertragungsverhaltens eines Einschnckenextruders. Diplomarbeit ESR-8515, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [B5] Bitmead, R.R., S.-Y. Kung, B.D.O. Anderson und T. Kailath: Greatest Common Divisors via Generalized Sylvester and Bezout Matrices. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-23, S. 1043-1047, 1978.
- [B6] Benelux Working Group on Software: An Inventory for Computer Aided Control System Design. WGS-Report 85-1, Eindhoven University of Technology, Department of Mathematics and Computing Science, 1985.
- [C1] Callier, F.M. und C.A. Desoer: Multivariable Feedback Systems. Springer Verlag, New York, 1982.
- [C2] Chang, B.C. und J.B. Pearson: Algorithms for Solving Polynomial Equations Arising in Multivariable Control Theory. Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, S. 1159-1164, 1983.
- [C3] Cheng, L. und J.B. Pearson: Synthesis of Linear Multivariable Regulators. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 194-202, 1981.
- [C4] Cremer, M.: Entkoppelung von Mehrgrößensystemen mit Reglern minimaler Ordnung. Dissertation, Abteilung für Elektrotechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1970.
- [D1] Dastych, J.: Ein Beitrag zum Entwurf von Regelungen für Führungs- und Störverhalten. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1983.
- [D2] Davis, H. C.: Factoring the spectral Matrix. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-8, S. 296-305, 1963.
- [D3] Davison, E.J. und A. Goldenberg: Robust Control of a General Servomechanism Problem: The Servo Compensator. Automatica, 11, S. 469-471, 1975.

- [D4] Davison, E.J. und I.J. Ferguson: The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 93-110, 1981.
- [D5] Delsarte, P., Y. Gemin und Y. Kamp: A simple approach to spectral factorization. IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-25, S. 943-946, 1978.
- [D6] Dickinson, F.M., M. Morf und T. Kailath: A Minimal Realization Algorithm for Matrix Sequences. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19, S. 31, 1977.
- [D7] Diekmann, K.: Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzmethoden. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [D8] Dion, J.M. und L. Dugard: Parametrizations for Multivariable Adaptive Systems. Preprints of the IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, San Francisco, 1983.
- [D9] Dongarra, J.J. et al.: LINPACK User's Guide. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [D10] Doyle, J.C., Stein, G.: Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, No.1, Februar 1981.
- [D11] Doyle, J.C., Stein, G.: Robustness with Observers. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24, No.4, August 1979.
- [E1] Elliot, H., W.A. Wolovich und M. Das: Arbitrary Adaptive Pole Placement for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-29, S. 221-229, 1984.
- [E2] Emami-Naeini, A. und G.F. Franklin: Zero Assignment in the Multivariable Robust Servomechanism. Proceedings of the 21st IEEE Conference on Decision and Control, S. 891-893, 1982.
- [E3] Emami-Naeini, A. und P. van Dooren: Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems. Automatica, 18, S. 415-430, 1982.
- [F1] Fallside, F. (Herausg.): Control System Design by Pole-Zero Assignment. Academic Press, London, 1979.

- [F2] Feinstein, J.: The Solution of the Matrix Polynomial Equation $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)$. Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, S. 316-321, 1983.
- [F3] Forney, G.D.: Minimal Bases of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems. SIAM Journal on Control, 13, S. 493-504, 1976.
- [G1] Gantmacher, F.R.: Matrizenrechnung I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.
- [G2] Garbow, B. et al.: Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide Extension. Lecture Notes in Computer Science, 51, Springer Verlag, New York, 1977.
- [G3] Geering, H.P.: Robuste Ausgangsrückführung. 59. Tagung der SGA: Nichtlineare, adaptive und robuste Regelung, ETH Zürich, September 1985.
- [G4] Gerth, W.: Zur Identifikation und Minimalrealisierung von Mehrgrößensystemen durch Markov-Parameter. Dissertation, Technische Universität Hannover, 1972.
- [G5] Guidorzi, R.: Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems. Automatica, 11, S. 361-374, 1975. Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, S. 316-321, 1983.
- [H1] Heister, M.: Eine Methodik zur rechnerunterstützten Analyse und Synthese multivariabler Regelsysteme. Dissertation, Universität Gesamthochschule Wuppertal, 1983.
- [J1] Janiszowski, K. und H. Unbehauen: Entwurf eines neuartigen Entkopplungsreglers für Mehrgrößenregelstrecken. Automatisierungstechnik, at-35, Nr. 2, S. 56-65, 1987.
- [K1] Kaczorek, T.: A New Method for Finding a Row Minimal Degree Solution to the Matrix Polynomial Equation $A(s)X(s)+B(s)Y(s)=C(s)$. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 34, No.9-10, 1986
- [K2] Kaczorek, T.: Application of Polynomial Matrices in Automatic Control Systems. Vorlesung an der Ruhr-Universität Bochum, WS 1985/86.

- [K3] Kaczorek, T.: Deadbeat Control of Multivariable Closed Loop Linear Time-Discrete Systems with Amplitude Constraints of Control Inputs. Foundations of Control Engineering, 7, S. 155-167, 1982.
- [K4] Kaczorek, T.: Polynomial Equation Approach to Exact Model Matching Problem in Multivariable Linear Systems. Int. Journal of Control, 36, S. 531-539, 1982.
- [K5] Kaczorek, T.: Zero-degree Solutions to $AX+BY=C$ and Invariant Factors Assignment. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 34, No.9-10, 1986
- [K6] Kaczorek, T.: Zero-degree Solutions to the Bilateral Polynomial Matrix Equation. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 34, No.9-10, 1986
- [K7] Kailath, T.: Linear Systems. Prentice Hall, Englewood-Cliffs, 1980.
- [K8] Karduck, J.: Strukturprüfung und Parameterschätzung für Mehrgrößensysteme in Polynommatrizendarstellung. Diplomarbeit ESR-8721, Ruhr-Universität Bochum, 1987.
- [K9] Keuchel, U. und Chr. Schmid: KEDDC Benutzerhandbuch - IBM-XT/AT-MSDOS Implementierung. Interner Bericht ESR-8614, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [K10] Keuchel, U.: Eine Methode zur Polynommatrizenvorgabe und exakten Modellnachbildung durch Zustandsvektorrückführung. Interner Bericht ESR-8410, Ruhr-Universität Bochum, 1984.
- [K11] Kiffmeier, U.: Entwurf und Erprobung von Polynommatrizenreglern für Mehrgrößensysteme. Diplomarbeit ESR-8704, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [K12] Kucera, V.: Discrete Linear Control. The Polynomial Equation Approach. John Wiley, Chichester, 1979.
- [K13] Kucera, V.: New Results in State Estimation und Regulation. Automatica, 17, S. 745-748, 1981.
- [K14] Kucera, V.: Stochastic Multivariable Control: A Polynomial Equation Approach. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-25, S. 913-919, 1980.

- [K15] Kung, S. und T. Kailath: Fast Projection Methods for Minimal Design Problems in Linear System Theory. Automatica, 16, S. 389-403, 1980.
- [K16] Kwakernaak, H., Sivan R.: Linear Optimal Control Systems. Wiley Interscience, New York, 1972.
- [L1] Laub, A.: A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24, S. 913- 921, 1979.
- [L2] Lawson, C.L. und R.J. Hanson: Solving Least Squares Problems. Prentice Hall, Englewood-Cliffs, 1974.
- [L3] Lethomakhi, N.A., Sandell, N.R., Athans, M.: Robustness Results in Linear-Quadratic-Gaussian Multivariable Control Design. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, No.1, S. 75-93, 1981.
- [L4] Luenberger, D.G.: Canonical Forms for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, S. 291-294, 1967.
- [M1] Moore, B.C.: Singular Value Analysis of Linear Systems. Part I and Part II. System Control Report No. 7801 und 7802. Department of Electrical Engineering, University of Toronto, 1978.
- [N1] Nichols, N.K.: On Computational Algorithms for Pole Assignment. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-32, S. 643-645, 1986.
- [P1] Paraskevopoulos, P.N., M.A. Christodoulo, M.A und M.A. Tsakiri: Eigenvalue-eigenvector Sensitivity Analysis of Linear Time-Invariant Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-32, S. 344-346, 1984.
- [P2] Paige, C.C.: Properties of Numerical Algorithms Related to Computing Controllability. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 164-176, 1980.
- [P3] Patel, R.V. und N. Munro: Multivariable System Theory and Design. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [P4] Pernebo, L.: An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 171-182, 1981.

- [P5] Popov, V.M.: Invariant Description of Linear Time-Invariant Controllable Systems. SIAM J. of Control, 10, S. 252-264, 1972.
- [R1] Rissanen, J.: Algorithm for Triangular Decomposition of Block-Hankel and Toeplitz Matrices with Applications to Factoring Positive Matrix polynomials. Math. Comput., 27, S. 147-155, 1973.
- [R2] Rosenbrock, H.H.: State-Space and Multivariable Theory. Nelson, London, 1970.
- [S1] Safonov, M.G., Athans, M.: Gain and Phase Margins for Multiloop LQG Regulators. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, No.2, April 1977.
- [S2] Safonov, M.G.: Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. Cambridge, MIT Press, 1980.
- [S3] Schumann, R.: Digitale parameteradaptive Mehrgrößenregelung. KfK-PDV Bericht 217, Februar 1982.
- [S4] Solak, M.K.: Differential Representations of Multivariable Linear Systems with Disturbances and Polynomial Equations $\underline{P} \underline{X} + \underline{Q} \underline{Y} = \underline{W}$ and $\underline{P} \underline{X} + \underline{Y} \underline{N} = \underline{V}$. IEEE Trans. Automatic Control, S. 687-690, 1985.
- [U1] Unbehauen, H. und S. Engell: Anwendung des Mehrgrößen-Nyquist-Verfahrens auf ein Dampferzeugermodell. Regelungstechnik 27, S. 250-259, 1979.
- [U2] Unbehauen, H.: Regelungstechnik III. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1985.
- [U3] Unbehauen, H. und U. Keuchel: Realisierung eines diskreten adaptiven Polvorgabereglers auf dem Mikrorechner und dessen Anwendung. Fachtagung Automatisierung, TU Dresden, 1988.
- [V1] van der Weiden, A.J.J.: The Use of Structural Properties in Linear Multivariable Control System Design. Dissertation, TH Delft, Niederlande, 1983.
- [V2] van Dooren, P.M.: A Generalized Eigenvalue Approach for Solving Riccati Equations. SIAM J. Sci. Stat. Comp., 2, S. 121-135, 1981.

- [V3] van Dooren, P.M.: The Generalized Eigenstructure Problem in Linear System Theory. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, S. 111, 1981.
- [V4] Vandewalle, J. P. und P. Dewilde: On the Minimal Spectral Factorization of Nonsingular Positive Rational Matrices. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-21, S. 612-618, 1975.
- [W1] Walker, R.A., A. Emami-Naeini und P. van Dooren: A General Algorithm for Solving the Algebraic Riccati Equation. Proceedings of the IEEE Conference on Decision & Control, S. 68-70, 1982.
- [W2] Ward, R.C.: Balancing the Generalized Eigenvalue Problem. SIAM J. Sci. Stat. Comp., 2, S. 141-152, 1981.
- [W3] Wilkinson, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, Oxford, 1965.
- [W4] Wilkinson, J. H., Reinsch, C.: Linear Algebra. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [W5] Wolovich, W. A.: Multivariable System Synthesis with Step Disturbance Rejection. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-23, S. 127-130, 1977.
- [W6] Wolovich, W.A. und Guidorzi, R.: A General Algorithm for Determining State-Space Representations. Automatica, 13, S. 295, 1977.
- [W7] Wolovich, W.A. und P.L. Falb: Invariants and Canonical Forms under Dynamic Compensation. SIAM Journal on Control, 14, S. 996-1008, 1976.
- [W8] Wolovich, W.A.: Deadbeat Error Control of Discrete Multivariable Systems. Technical Report # ENG SE 81R, April 1982, Division of Engineering, Brown University, Providence.
- [W9] Wolovich, W.A.: Linear Multivariable Systems. Springer Verlag, New York, 1973.
- [W10] Wolovich, W.A.: The Canonical Diophantine Equation with Applications. Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, S. 1165-1171, 1983.

- [W11] Wonham, W.M.: Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer Verlag, New York, 1979.
- [Y1] Youla, D. C. und N. N. Kazanian: Bauer-type Factorization of Positive Matrices and the Theory of Matrix Polynomials Orthogonal on the Unit Circle. IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-25, S. 57-69, 1978.
- [Y2] Youla, D.C., J.J. Bongiorno und H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part II: The Multivariable Case. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, S. 319-338, 1976.
- [Y3] Yu, J., U. Keuchel und H. Unbehauen: Adaptive Pole Placement Control of a Dead Time Process with an Integrator and of a Double Integral Plant. Prepr. of the 5th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale, 1987.
- [Z1] Zeiske, K.: Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Übertragungsmatrix $G(s)$ aus den Zustandsraumparametern. Regelungstechnik 27, S. 52-58, 1979.

Anhang

A 0 Verzeichnis der Symbole und mathematischen Formelzeichen

Dimensionen und Ordnungen

m	Anzahl der Ausgangsgrößen der Regelstrecke
r	Anzahl der Eingangsgrößen der Regelstrecke
n	Ordnung der Regelstrecke
p	Ordnung des Störmodells
$\text{grad}_{si} \underline{P}(z)$	Grad der i -ten Spalte von $\underline{P}(z)$
$\text{grad}_{zi} \underline{P}(z)$	Grad der i -ten Zeile von $\underline{P}(z)$
$\text{grad}_{ij} \underline{P}(z)$	Grad der einzelnen Polynomelemente von $\underline{P}(z)$
$\text{grad } \underline{P}(z)$	Grad des Matrixpolynoms $\underline{P}(z)$

Signale

$\underline{Y}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	Ausgangsvektor
$\underline{X}(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Zustandsvektor
$\underline{u}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$	Stellvektor
$\underline{w}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	Sollwertvektor
$\underline{z}_u(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$	Störung am Regelstreckeneingang
$\underline{z}_y(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	Störung am Regelstreckenausgang
$\underline{e}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	Regelabweichung
$\underline{f}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$	Rückführsignal eines kombinierten P-Zustandsreglers mit Beobachter
$\underline{v}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$	Eingangsgröße eines P-Zustandsregelkreises bzw. Eingangsgröße des Störmodells

$\underline{i}(z) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ 'interner Zustand' der Regelstrecke

Übertragungsmatrizen

$\underline{G}(z)$ allgemeine Übertragungsmatrix

$\underline{G}_S(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}[z]$ Übertragungsmatrix der Regelstrecke

$\underline{G}_R(z) \in \mathbb{R}^{r \times m}[z]$ Übertragungsmatrix des Reglers

$\underline{G}_0(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}[z]$ Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises

$\underline{G}_{ab}(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}[z]$ Übertragungsmatrix vom Signal b zum Signal a

Polynommatrizen

$\underline{B}_r(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}[z]$ Zählerpolynommatrix der Regelstrecke (rechter Polynommatrizenquotient (PMQ))

$\underline{A}_r(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ Nennerpolynommatrix der Regelstrecke (rechter PMQ)

$\underline{B}_l(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}[z]$ Zählerpolynommatrix der Regelstrecke (linker PMQ)

$\underline{A}_l(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}[z]$ Nennerpolynommatrix der Regelstrecke (linker PMQ)

$\underline{N}(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ charakteristische Polynommatrix des Beobachters

$\underline{P}(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ Zählerpolynommatrix der Stellgrößenrückführung des Zustandsregler-Beobachter-Systems

$\underline{Q}(z) \in \mathbb{R}^{r \times m}[z]$ Zählerpolynommatrix der Ausgangsgrößenrückführung des Zustandsregler-Beobachter-Systems

$\underline{D}(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises beim P-Zustandsregler

$\underline{E}(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ charakteristische Polynommatrix des geschlossenen Regelkreises beim Regler für Führungs- und Störverhalten

$\underline{S}(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z]$ charakteristische Polynommatrix des Störmodells

$p_S(z)$ charakteristisches Polynom des Referenzsignales

$\underline{H}(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}[z]$	Zählerpolynommatrix des Störsystems
$\text{adj } \underline{B}(z)$	adjungierte Polynommatrix zu $\underline{B}(z)$
$\underline{A}_*(z)$	Parakonjugierte Polynommatrix zu $\underline{A}(z)$
$\underline{P}_{HK}$	höchste Koeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$
$\underline{P}_{HSK}$	höchste Spaltenkoeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$
$\underline{P}_{HZK}$	höchste Zeilenkoeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$
$\underline{P}_{NSK}$	niedere Spaltenkoeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$
$\underline{P}_{NZK}$	niedere Zeilenkoeffizientenmatrix von $\underline{P}(z)$

Matrizen

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Systemmatrix der Regelstrecke
$\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$	Eingangsmatrix der Regelstrecke
$\underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	Ausgangsmatrix der Regelstrecke
$\underline{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$	Durchgangsmatrix der Regelstrecke
$\underline{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$	Zustandsrückführmatrix
$\underline{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$	Schätzfehlerrückführmatrix beim Beobachter
$\underline{A}_S \in \mathbb{R}^{mp \times mp}$	Systemmatrix des Servokompensators
$\underline{B}_S \in \mathbb{R}^{mp \times m}$	Eingangsmatrix des Servokompensators
$\underline{K} \in \mathbb{R}^{m \times r}$	Aufschaltmatrix für Sollwerte
$\underline{U}_{zy} \in \mathbb{R}^{r \times m}$	Anfangswert der Stellgrößen für eine Ausgangsstörung $\underline{z}_y(k) = \underline{I}$ (Einheitssprung)
$\underline{U}_w \in \mathbb{R}^{r \times m}$	Anfangswert der Stellgrößen für einen Sollwertsprung $\underline{w}(k) = \underline{I}$
$\underline{T} \in \mathbb{R}^{r \times m}$	Kombinationsmatrix für die allgemeine Lösung einer diophantischen Gleichung

$\Phi_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Bewertungsmatrix für die Zustände in Steuerungsnormalform
$\Phi_u \in \mathbb{R}^{r \times r}$	Bewertungsmatrix für die Stellgrößen
$\Phi_Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Bewertungsmatrix für die Ausgangsgrößen
$\Phi_V \in \mathbb{R}^{r \times r}$	Bewertungsmatrix für die Eingangsgrößen des Störmodells
$\Phi_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$	Bewertungsmatrix für die 'internen Zustände'
$\Phi_{zu} \in \mathbb{R}^{r \times r}$	Bewertungsmatrix für die Eingangsstörungen
$\Phi_{zy} \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Bewertungsmatrix für die Ausgangsstörungen
$\Phi_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Bewertungsmatrix für die Zustände

Strukturbilder von Matrizen

$\otimes$	Strukturell von Null verschiedenes Element, Pivotelement
0	Strukturelles Nullelement
1	Normiertes Pivotelement
$\times$	Element mit beliebigem Wert

A 1 Zusammenhang zwischen Zustandsraumdarstellung und Polynommatrizenbe- schreibung

Im folgenden wird gezeigt, wie man aus einem rechten Polynommatrixquotienten eine Zustandsraumrealisierung in Steuerungsform gewinnen kann. Für die Zustandsraumrealisierung eines linken Polynommatrixquotienten kann man die entsprechende duale Darstellung, nämlich eine Beobachterform, herleiten. Hier wird absichtlich keine kanonische Form, die, wie in [W6], in ihrer Struktur und in ihren Parametern eindeutig ist, eingeführt. Einerseits ist es recht einfach, mittels elementarer Äquivalenztransformationen [R2] eine Normalform für einen Polynommatrixquotienten [B2] zu erhalten oder durch elementare Ähnlichkeitstransformation [W3] die Steuerungsnormalform bzw. Beobachternormalform [A5] für ein System in Zustandsraumdarstellung herzustellen. Andererseits ist es aber oft nicht zweckmäßig, die kanonische Form komplett zu entwickeln, da dies im allgemeinen zusätzliche und - wie in diesem Falle - numerisch nicht zu stabilisierende arithmetische Operationen erfordert. Als einzige Forderung soll hier die Spaltenreduziertheit der Nennerpolynommatrix genügen. Der Polynommatrixquotient braucht weder eine höchste Koeffizientenmatrix in Dreiecksform mit normierter Diagonale noch minimale Anzahl von Parametern [G5, W6] zu besitzen.

Gegeben sei ein echt rationaler spaltenreduzierter rechter Polynommatrixquotient

$$\underline{\underline{G}}(z) = \underline{\underline{B}}(z) \underline{\underline{A}}^{-1}(z)$$

für den nach Kapitel 2 gilt

$$\text{grad}_{\text{si}} \underline{\underline{B}}(z) < \text{grad}_{\text{si}} \underline{\underline{A}}(z).$$

Man führt nun neben den z-Transformierten des Steuervektors $\underline{u}(z)$ und des Ausgangsvektors $\underline{y}(z)$ mit Gl. (A1.1a,b) den sogenannten "internen Zustand" $\underline{i}(z)$ [W9] ein. Hiermit gilt

$$\underline{\underline{A}}(z) \underline{i}(z) = \underline{u}(z) \tag{A1.1.a}$$

$$\underline{y}(z) = \underline{\underline{B}}(z) \underline{i}(z) . \tag{A1.1.b}$$

Die Polynommatrizen $\underline{\underline{A}}(z)$ und $\underline{\underline{B}}(z)$ werden für die weitere Rechnung in eine höchste und eine niedere Spaltenkoeffizientenmatrix gemäß

$$\underline{\underline{A}}(z) = \underline{\underline{A}}_{\text{HSK}} \underline{\underline{F}}(z) + \underline{\underline{A}}_{\text{NSK}} \underline{\underline{S}}(z) \quad (\text{A1.2.a})$$

$$\underline{\underline{B}}(z) = \underline{\underline{B}}_{\text{NSK}} \underline{\underline{S}}(z) \quad (\text{A1.2.b})$$

zerlegt. Für die Monommatrizen $\underline{\underline{F}} \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$ und $\underline{\underline{S}}(z) \in \mathbb{R}^{n \times r}[s]$ in Gl. (A1.2a,b) ergibt sich mit den Spaltengraden $n_{si} = \text{grad}_{si} \underline{\underline{A}}(z)$ die Struktur

$$\underline{\underline{F}}(z) = \begin{bmatrix} z^{n_{s1}} & 0 & & 0 \\ 0 & z^{n_{s2}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{n_{sr}} \end{bmatrix},$$

und

$$\underline{\underline{S}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ s & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{n_{s1}-1} & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & z & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z^{n_{s2}-1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & z^{n_{sr}-1} \end{bmatrix}.$$

Für die Ordnung des steuerbaren Zustandsraumsystems erhält man

$$n = \sum_{i=1}^m n_{si}.$$

Da $\underline{\underline{A}}(z)$ spaltenreduziert ist, gilt

$$\det \underline{\underline{A}}_{\text{HSK}} \neq 0. \quad (\text{A1.3})$$

Mit diesen Vereinbarungen kann man nun die Zustandsraumrealisierung der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{G}}(z)$ herleiten. Aus Gl. (A1.1,2) folgt

$$\underline{A}_{\text{HSK}} \underline{F}(z) \underline{i}(z) = \underline{u}(z) - \underline{A}_{\text{NSK}} \underline{S}(z) \underline{i}(z)$$

$$\underline{i}(z) = \underline{F}^{-1}(z) \underline{A}_{\text{HSK}}^{-1} [\underline{u}(z) - \underline{A}_{\text{NSK}} \underline{S}(z) \underline{i}(z)]$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{B}_{\text{NSK}} \underline{S}(z) \underline{F}^{-1}(z) [\underline{A}_{\text{HSK}}^{-1} \underline{u}(z) - \underline{A}_{\text{HSK}}^{-1} \underline{A}_{\text{NSK}} \underline{S}(z) \underline{i}(z)] \quad (\text{A1.4})$$

Das durch die letzte Gleichung beschriebene System entspricht im Zeitbereich dem Übertragungssystem im Blockschaltbild gemäß Bild A1.1. Hierin wird $\underline{F}^{-1}(z)$ durch Ketten von Verzögerungsgliedern realisiert. $\underline{S}(z)$ beschreibt die Auskopplung der Zustände aus diesen Ketten.

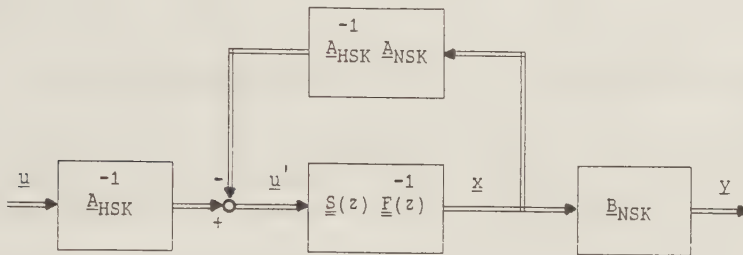


Bild A1.1 Blockschaltbild des Übertragungssystems Gl. (A1.4)

Das innere System aus Bild A.1.1 kann man durch die Zustandsübertragungsmatrix seiner Zustandsraumrealisierung

$$\underline{S}(z) \underline{F}^{-1}(z) = (z \underline{I} - \underline{A}_0)^{-1} \underline{B}_0 \quad (\text{A1.5})$$

beschreiben. Hierbei gilt für die Systemmatrix

$$\underline{A}_0 = \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}, n_{s1} \times n_{s1}, i = 1, \dots, r \right) \quad (\text{A1.6.a})$$

und für die Steuermatrix

$$\underline{B}_0 = \text{block-diag} \left[(0 \dots 0 \ 1)^T, n_{s1} \times 1, i = 1, \dots, r \right] \quad (\text{A1.6.b})$$

Die kanonische Beschreibungsform, Gl. (A1.6), wird als Brunowski-Form bezeichnet [K7] und ist allein durch die Steuerbarkeitsindizes bzw. durch die Spaltengrade der Nennerpolynommatrix $\underline{A}(z)$ festgelegt.

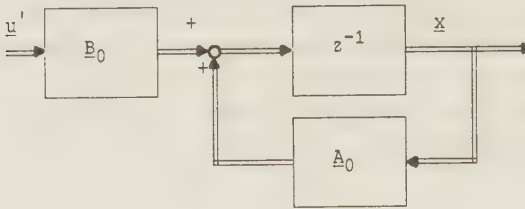


Bild A1.2 Blockschaltbild des inneren Übertragungssystems zu Bild A1.1

Das System in Bild A1.1 kann als Zustandsrückführung des inneren Übertragungssystems nach Bild A1.2 interpretiert werden. Damit erhält man für die gesuchte Zustandsraumdarstellung eines rechten Polynommatrizenquotienten $\underline{B}(z)$ $\underline{A}^{-1}(z)$ die Beziehungen

$$\underline{A}_S = \underline{A}_0 - \underline{B}_0 \underline{A}_{HSK}^{-1} \underline{A}_{NSK} \quad (\text{A1.7.a})$$

$$\underline{B}_S = \underline{B}_0 \underline{A}_{HSK}^{-1} \quad (\text{A1.7.b})$$

$$\underline{C}_S = \underline{B}_{NSK} \quad (\text{A1.7.c})$$

Wie man leicht nachprüfen kann, liegt das System $[\underline{A}_S, \underline{B}_S, \underline{C}_S]$ in der Steuerungsform mit einer Struktur gemäß Bild A1.3 vor.

Bisher wurde gezeigt, wie ein gegebener rechter Polynommatrixquotient in einer steuerbaren Zustandsraumbeschreibung realisiert werden kann. Hierzu sind, unter der Voraussetzung der Spaltenreduziertheit der Nennerpolynommatrix, lediglich ein Aufstellen der niederen und führenden Koeffizientenmatrizen, was einer Sortieroperation entspricht, und die Lösung eines linearen Gleichungssystems der niedrigen Ordnung m , um die Inversion von $\underline{A}_{HSK}$ zu umgehen, notwendig.

$$\underline{A}_S = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right]$$

$$\underline{B}_S = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \end{array} \right]$$

$$\underline{C}_S = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right]$$

Bild A1.3: Steuerungsform eines Systems 7. Ordnung mit 3 Eingängen und 2 Ausgängen

Die Berechnung eines Polynommatrixquotienten aus der Zustandsraumdarstellung erfolgt durch Transformation der Zustandsmatrix auf Steuerungsform, wofür zahlreiche numerische Verfahren in der Literatur angegeben wurden [A5, H1, V3, P2, P3]. Aus den charakteristischen Zeilen der Steuerungsform kann man sofort durch Umkehrung der Beziehungen nach Gl. (A1.7) die Polynomkoeffizienten berechnen.

A 2 Beispiel zur Strukturgleichung (3.3.3.1.7)

Wenn auf der Ebene von Systemstrukturen gearbeitet wird, ist es fast stets schwierig, bestimmte Zusammenhänge in geschlossener Form darzustellen. So führt Luenberger in [L4] aus, daß er die Sonderformen mehr durch langwierige Inspektion als durch algebraische Umformungen erreicht hat. So soll auch hier für die Gültigkeit von

$$(z \underline{I} - \underline{A}) \underline{T}_S \underline{H}^T(z) + \underline{T}_S = \underline{B}_D \underline{S}(z) \quad (3.3.3.1.7)$$

nur ein erläuterndes Beispiel angegeben werden. Diese Gleichung bildet die Grundlage für die Lösung der unilateralen diophantischen Gleichung mittels Realisierung im Zustandsraum. Die Formel kann durch Einsetzen von (3.3.3.1.3-6) bewiesen werden. Hier soll sie jedoch nur anhand eines Systems sechster Ordnung mit drei Eingängen und den Steuerbarkeitsindizes $n_{s1}=3$, $n_{s2}=2$ und $n_{s3}=1$ plausibel gemacht werden. Nach [L4] erhält man als Transformationsmatrix

$$\underline{T}_S = [\underline{b}_1, \underline{A} \underline{b}_1, \underline{A}^2 \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{A} \underline{b}_2, \underline{b}_3].$$

Die Monommatrizen nach dem Strukturtheorem [W7, W9] sind

$$\underline{S}(z) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & z & z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

und

$$\underline{H}(z) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Für die rechte Seite des Gleichungssystems, Gl. (3.3.3.1.7) erhält man

$$\underline{B} \underline{S}(z) = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \underline{b}_3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & z & z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underline{B} \underline{S}(z) = [\underline{b}_1, z \underline{b}_1, z^2 \underline{b}_1, \underline{b}_2, z \underline{b}_2, \underline{b}_3] \quad (\text{A.2.1})$$

und für die linke Seite ergibt sich mit

$$\underline{T}_S \underline{H}^T(z) = [\underline{b}_1, \underline{A} \underline{b}_1, \underline{A}^2 \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{A} \underline{b}_2, \underline{b}_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\underline{0}, \quad \underline{b}_1, z \underline{b}_1 + \underline{A} \underline{b}_1, \quad 0, \underline{b}_2, \quad 0]$$

nach Ausmultiplizieren und Aufsummieren

$$(z \underline{I}) \underline{T}_S \underline{H}^T(z) = [\underline{0}, z \underline{b}_1, z^2 \underline{b}_1 + z \underline{A} \underline{b}_1, 0, z \underline{b}_2, 0]$$

$$(-\underline{A}) \underline{T}_S \underline{H}^T(z) = [0, -\underline{A} \underline{b}_1, -z \underline{A} \underline{b}_1 - \underline{A}^2 \underline{b}_1, 0, -\underline{A} \underline{b}_2, 0]$$

$$\underline{T}_S = [\underline{b}_1, \underline{A} \underline{b}_1, \underline{A}^2 \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{A} \underline{b}_2, \underline{b}_3]$$

$$(z \underline{I} - \underline{A}) \underline{T}_S \underline{H}^T(z) + \underline{T}_S = [\underline{b}_1, z \underline{b}_1, z^2 \underline{b}_1, \underline{b}_2, z \underline{b}_2, \underline{b}_3]$$

(A.2.2)

Durch den Vergleich der rechten Seite von Gl. (A.2.1) und der linken Seite von Gl. (A.2.2) folgt, daß Gl. (3.3.3.1.7) erfüllt ist.

A 3 Überprüfung der Lösbarkeit der unilateralen diophantischen Gleichung

Die unilaterale diophantische Gleichung, Gl. (3.4.1), ist genau dann lösbar, wenn der größte gemeinsame rechte Teiler (ggrT) von $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ auch ein rechter Teiler von $\underline{R}(z)$ ist. Wie in Abschnitt 3.4.2 gezeigt wurde, hängt in numerischer Hinsicht die Ordnung des ggrT von der Fehlerschranke $e_{\max}$ zur Beurteilung der linearen Abhängigkeit ab. Im folgenden wird gezeigt, wie man diesen größten gemeinsamen rechten Teiler von $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ finden und die Lösbarkeit der unilateralen Polynommatrizengleichung überprüfen kann. Hierbei soll nicht das in Abschnitt 3.2 angegebene numerische Verfahren eingesetzt werden, sondern die Überprüfung auf Primheit und die Extraktion eines Teilers soll mit dem Nullraumverfahren nach Abschnitt 3.3 durchgeführt werden.

1. Schritt:

Das System $\{\underline{A}(z), \underline{B}(z)\}$ ist unter Ausnutzung einer dualen primen Faktorisierung gemäß

$$\underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \rightarrow \underline{A}_1^{-1}(z) \underline{B}_1(z) \rightarrow \underline{B}_r(z) \underline{A}_r^{-1}(z)$$

auf ein rechtes Primmatrixprodukt zu transformieren. Falls $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ einen ggrT der Ordnung n enthalten, dann unterscheiden sich die Summe der Zeilenordnungen von $\underline{A}_1(z)$ und die Summe der Spaltenordnungen von $\underline{A}_r(z)$ um den Summanden n . Sind die Summen gleich, dann ist der ggrT unimodular und die unilaterale diophantische Gleichung (3.4.1) auf jeden Fall lösbar.

2. Schritt:

Die Berechnung des ggrT $\underline{L}(z)$ aus $\underline{A}(z)$ und $\underline{A}_r(z)$ ist durchzuführen. Die unilaterale diophantische Gleichung muß jetzt mit den Eingabeparametern $\underline{R}(z)=\underline{A}(z)$, $\underline{A}(z)=\underline{P}_r(z)$ und $\underline{B}(z)=\underline{0}$ gelöst werden und man erhält

$$\underline{A}(z) = \underline{A}_r(z) \underline{P}(z) + \underline{0} \underline{Q}(z)$$

$$\underline{L}(z) = \underline{P}(z).$$

3.Schritt:

Es ist zu überprüfen, ob $\underline{L}(z)$ ein rechter Teiler von $\underline{R}(z)$ ist. Dazu ist die unilaterale diophantische Gleichung mit den Eingabeparametern $\underline{R}(z)=\underline{\underline{R}}(z)$, $\underline{A}(z)=\underline{\underline{L}}(z)$ und $\underline{B}(z)=\underline{I}$, also

$$\underline{R}(z) = \underline{P}(z) \underline{L}(z) + \underline{Q}(z) \underline{I}$$

zu lösen.

Die unilaterale diophantische Gleichung ist lösbar, falls $\underline{Q}(z) = \underline{0}$.

A 4 Der sequentielle QR-Algorithmus

Eine ausführliche Beschreibung des QR-Verfahrens ist z.B. in [W4, L2] zu finden. Hier soll nur gezeigt werden, wie man den QR-Algorithmus so modifizieren kann, daß einzelne Spalten zu der Basis hinzugefügt werden können, ohne daß die QR-Zerlegung völlig neu berechnet werden muß.

Gegeben sei die QR-Zerlegung der Matrix $\underline{A}_k = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_k]$ gemäß

$$\underline{Q}_k \underline{A}_k = \begin{bmatrix} \underline{R}_k \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ mit } \underline{A}_k \in \mathbb{R}^{m \times k}, \underline{Q}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}, \underline{R}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}.$$

$\underline{R}_k$ ist eine nicht-singuläre rechte obere Dreiecksmatrix, $\underline{Q}_k$ eine orthogonale Matrix. Gesucht ist die QR-Zerlegung der Matrix $\underline{A}_{k+1} = [\underline{A}_k \ \underline{a}_{k+1}]$ für die gilt

$$\underline{Q}_k [\underline{A}_k \mid \underline{a}_{k+1}] = \begin{bmatrix} \underline{R}_k & \mid & \underline{Q}_k \underline{a}_{k+1} \\ \underline{0} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_k & \mid & \underline{a}'_{k+1} \\ \underline{0} & & \end{bmatrix}.$$

Die letzte Spalte der rechten Seite ist im allgemeinen noch voll besetzt. Deshalb ist eine weitere Orthogonaltransformation $\underline{Q}_{k+1}$ nötig, die die Elemente $k+2 \dots m$ der letzten Spalte eliminiert. Diese wird konstruiert zu

$$\underline{Q}'_k \underline{a}'_{k+1} = [\underline{r}_{k+1}^T \ 0]^T.$$

Die QR-Zerlegung von $\underline{A}_{k+1}$ ist dann gegeben durch

$$\underline{Q}'_k \underline{A}'_{k+1} = [\underline{R}_{k+1}^T \ 0]^T,$$

und für die gesamte Transformation folgt

$$\underline{Q}_{k+1} = \underline{Q}_{k+1} \underline{Q}_k,$$

$$\underline{R}_{k+1} = [\underline{R}_k \mid \underline{r}_{k+1}].$$

A 5 Der sequentielle Gauß-Algorithmus

Bei dem in Abschnitt 3.3.4.2 verwendeten Verfahren zur QR-Zerlegung geht es nur am Rande um die Minimierung einer Fehlernorm. Vielmehr werden die Spalten einer Matrix durch Orthogonalisierung auf lineare Abhängigkeit überprüft und mit der so erhalten minimalen Basis wird ein Gleichungssystem gelöst. Ist die Invarianz der Norm einer Matrix bedeutungslos, dann kann an Stelle von Householder-Transformation auch Gauss-Elimination mit Pivottisierung eingesetzt werden. Der sequentielle Gauß-Algorithmus arbeitet ganz analog zum sequentiellen QR-Verfahren. Wie man leicht nachprüfen kann, handelt es sich bei dem hier beschriebenen Verfahren um eine Abwandlung der bekannten Faktorisierung in eine obere und eine untere Dreiecksmatrix.

Gegeben sei eine Transformationsmatrix T_k und eine rechte obere Dreiecksmatrix R_k , so daß gilt

$$T_k A_k = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist wiederum eine Zerlegung T_{k+1} und R_{k+1} für die Matrix

$$A_{k+1} = [A_k \mid a_{k+1}],$$

so daß gilt

$$T_k [A_k \mid a_{k+1}] = \left[\begin{array}{c|c} R_k & T_k a_{k+1} \\ \hline 0 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_k & ' \\ \hline 0 & a_{k+1} \end{array} \right]$$

und

$$T_{k+1} \begin{bmatrix} ' \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Vektor der rechten Seite enthält in den Elementen $k+2 \dots m$ ausschließlich Nullen. Die gesuchte Gauß-Zerlegung der Basis lautet dann

$$\underline{T}_{k+1} \underline{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{k+1} \\ \underline{0} \end{bmatrix},$$

$$\underline{T}_{k+1} = \underline{T}_{k+1}' \underline{T}_k,$$

$$\underline{R}_{k+1} = [\underline{R}_k \mid \underline{r}_{k+1}].$$

Wie beim QR-Verfahren wird auch hier die Transformationsmatrix $\underline{T}_{k+1}$ nicht explizit berechnet, sondern es werden die in den einzelnen Schritten anfallenden Transformationen $\underline{T}_i$ abgespeichert, um numerische Fehler bei der Akkumulation der Transformationsmatrix zu vermeiden. Die Auflösung des Überbestimmten Gleichungssystems

$$\underline{A}_k \underline{x} = \underline{b}$$

in der transformierten Form

$$\underline{T}_k \underline{A}_k \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{R}_k \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \underline{T}_k \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1' \\ \underline{b}_2' \end{bmatrix},$$

geschieht, wie üblich durch Rücksubstitution von

$$\underline{R}_k \underline{x} = \underline{b}_1'.$$

Die Euklidische Norm des Fehlers ist gegeben durch

$$e = \|\underline{b}_2'\|.$$

Hierbei muß betont werden, daß es sich im Gegensatz zum Verfahren der orthogonalen QR-Zerlegung nicht um eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate handelt. Dies ist jedoch auch gar nicht ein Ziel der hier benutzten Methoden, da ein bestimmtes Gleichungssystem zu lösen ist. Die Fehlernorm wird nur benutzt, um eine numerisch sinnvolle Entscheidung über die lineare Abhängigkeit des Vektors der rechten Seite zu treffen.

A 6 Spezifikationen für den Reglerentwurf nach Abschnitt 6.1

Damit die in Abschnitt 6.1 vorgestellten Ergebnisse der Echtzeitregelung nachvollziehbar sind, ist es notwendig die Gewichtungsmatrizen, die für die quadratisch optimale Synthese der Regler und Beobachter eingesetzt wurden, anzugeben. Die Auflistung der Reglerpolynommatrizen erscheint nicht notwendig, da diese mit den im Abschnitt 6.1.2 angegebenen Modellen der Regelstrecke und den Entwurfsgleichungen rekonstruierbar sind. Zusätzlich zu den Gewichtungen werden auch die invarianten Nullstellen der charakteristischen Polynommatrizen von Beobachtersystem und geschlossenem Regelkreis angegeben.

1) P-Zustandsregler nach Abschnitt 6.2.3.1

$$\Phi_u = \text{diag} [1.1 \quad 0.15] , \quad \Phi_y = \text{diag} [5.0 \quad 1.5] , \quad \Phi_i = 0$$

$$\Phi_{zu} = \text{diag} [0.8 \quad 1.2] , \quad \Phi_{zy} = \text{diag} [1.2 \quad 0.4]$$

Pole					
geschlossenener Regelkreis			Beobachter		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	.186931	.298659	1	.768189	0.00000
2	.186931	-.298659	2	.190023	0.00000
3	.524436	0.00000	3	.271615	.279670
4	.174380	0.00000	4	.271615	-.279670

2) PI-Regler nach Abschnitt 6.2.3.2

$$\Phi_v = \text{diag} [1.0 \quad 3.0] , \quad \Phi_u = \text{diag} [9.0 \quad 8.0] , \quad \Phi_y = \text{diag} [22.0 \quad 10.0]$$

$$\Phi_{zu} = \text{diag} [0.8 \quad 1.0] , \quad \Phi_{zy} = \text{diag} [1.4 \quad 0.6]$$

Pole					
geschlossenener Regelkreis			Beobachter		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	.690001	0.00000	1	.784568	0.00000
2	.329856	.271067	2	.193382	0.00000
3	.329856	-.271067	3	.315053	.266477
4	.203005	0.00000	4	.315053	-.266477
5	.0877556	0.00000			
6	.0349538	0.00000			

3) Regler für Stormodell Sinus und Sprung nach Abschnitt 6.2.3.3

$$\Phi_v = \text{diag}[80.0 \quad 20.0] , \Phi_u = \text{diag}[6.0 \quad 2.0] , \Phi_y = \text{diag}[2.0 \quad 0.5]$$

$$\Phi_{zu} = \text{diag}[0.8 \quad 1.0] , \Phi_{zy} = \text{diag}[3.0 \quad 5.0]$$

Pole					
geschlossenener Regelkreis			Beobachter		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	.775591	0.00000	1	.814140	0.00000
2	.553987	0.00000	2	.193324	0.00000
3	.573376	.438871	3	.430276	.216914
4	.573376	-.438871	4	.430276	-.216914
5	.597487	.421048			
6	.597487	-.421048			
7	.193004	0.00000			
8	.186931	0.00000			
9	.453898	.201098			
10	.174380	-.201098			

4) Entkoppelnder Regler nach Abschnitt 6.2.3.4

Zusätzlich ist das Entkopplungsnetzwerk $\underline{\underline{g}}^{-1}(z)$ $\text{adj}\underline{\underline{B}}_1(z)$ gegeben durch

$$\underline{\underline{g}}(z) = \text{diag} [z^2 - z \quad z - 1] ,$$

$$\tilde{b}_{11}(z) = -5.4624 \cdot 10^{-2} + 2.2130 \cdot 10^{-1} z + 1.3424 \cdot 10^{-1} z^2$$

$$\tilde{b}_{12}(z) = -1.2558 \cdot 10^{-1} - 9.6896 \cdot 10^{-3} z$$

$$\tilde{b}_{21}(z) = 5.8047 \cdot 10^{-1} - 5.2770 \cdot 10^{-1} z - 7.7788 \cdot 10^{-2} z^2$$

$$\tilde{b}_{22}(z) = -7.0281 \cdot 10^{-2} - 1.2604 \cdot 10^{-3} z .$$

$$\Phi_u = \text{diag} [1.0 \quad 1.0] , \quad \Phi_y = \text{diag} [30.0 \quad 1000.0] , \quad \Phi_i = 0$$

$$\Phi_{zu} = \text{diag} [200.0 \quad 200.0] , \quad \Phi_{zy} = \text{diag} [1.0 \quad 1.0]$$

Pole					
geschlossenener Regelkreis			Beobachter		
Nr.	Realteil	Imaginärteil	Nr.	Realteil	Imaginärteil
1	0.00000	0.00000	1	0.00000	0.00000
2	.369828	.169671	2	.0951546	.322899
3	.369828	-.169671	3	.0951546	-.322899
4	.849951	0.00000	4	.200869	0.00000
5	.849217	0.00000	5	.161810	.237352
6	.03055519	.263167	6	.161810	-.237352
7	.93055519	-.263167	7	.849319	0.00000
8	.118569	0.00000	8	.849236	0.00000

A 7 Modellparameter der Regelstrecke Kunststoffextruder

Die Verstärkungsfaktoren und Zeitkonstanten des Übertragungssystems nach Bild 6.2.1.2 sind durch experimentelle Identifikation [B4] an einer realen Anlage gewonnen worden. In dieser Arbeit werden nur die Temperaturen der beiden letzten Heizzonen und die Massetemperatur des Produkts als Regelgrößen betrachtet, da diese den größten Einfluß auf die Produktqualität haben. Die Übertragungsfunktionen von Heizleistung zu Zonentemperatur sind durch den Index "H" gekennzeichnet, die Koppellemente, die den Einfluß der Zonentemperatur auf die Temperatur der Nachbarzone beschreiben besitzen den Index "T". Berücksichtigt man noch die Massentemperaturen (Index "M") und die Drehzahl der Schnecke (Index "N"), dann kann die 3×3-Übertragungsmatrix zum Blockschaltbild, Bild 6.2.1.2, aus den Parametern der sieben Einzelübertragungsfunktionen nach Tabelle A7.1 berechnet werden.

i	Übertragungsfunktion	K_i	$T_i/\text{Min.}$
1	$G_{H44}(s)$	1.067	49.70
2	$G_{T45}(s)$	0.111	20.54
3	$G_{T4M}(s)$	0.170	9.58
4	$G_{H55}(s)$	1.343	45.20
5	$G_{T54}(s)$	0.479	33.60
6	$G_{T5M}(s)$	0.400	3.33
7	$G_{NM}(s)$	0.250	0.833

Tabelle A7.1 Zeitkonstanten und Verstärkungen der Teilübertragungsfunktionen des Extrudermodells nach [B4]

Die Minimalrealisierung des Übertragungssystems ergab eine kontinuierliche Zustandsraumdarstellung siebter Ordnung. Nach der Diskretisierung dieser Systembeschreibung durch Auswertung der Matrixexponentialfunktion für eine Abtastzeit von 30 s, wurde das Primmatrixprodukt $\underline{G}(z) = \underline{B}(z)\underline{A}^{-1}(z)$ berechnet. Die Parameter und invarianten Nullstellen der Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ sind in den Tabellen A7.2,3 angegeben.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -1.0739 \cdot 10^1 + 3.3158 \cdot 10^1 z - 3.4123 \cdot 10^1 z^2 + 1.1704 \cdot 10^1 z^3 \\
 a_{21} &= 7.4943 \cdot 10^{-3} - 4.0859 \cdot 10^{-2} z + 5.9712 \cdot 10^{-2} z^2 - 2.6350 \cdot 10^{-2} z^3 \\
 a_{31} &= -6.2652 \cdot 10^{-4} + 1.1514 \cdot 10^{-3} z + 6.3679 \cdot 10^{-4} z^2 - 1.1921 \cdot 10^{-3} z^3 \\
 a_{12} &= 2.5889 \cdot 10^{-1} - 5.2678 \cdot 10^{-1} z + 2.6795 \cdot 10^{-1} z^2 \\
 a_{22} &= -7.0908 \cdot 10^0 + 2.2611 \cdot 10^1 z - 2.3980 \cdot 10^1 z^2 + 8.4606 \cdot 10^0 z^3 \\
 a_{32} &= -4.0440 \cdot 10^{-3} + 7.2306 \cdot 10^{-3} z + 4.6075 \cdot 10^{-3} z^2 - 7.9333 \cdot 10^{-3} z^3 \\
 a_{13} &= 0.0 \\
 a_{23} &= 0.0 \\
 a_{33} &= -1.2157 + 2.2157 z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= 1.1586 \cdot 10^{-1} - 2.4071 \cdot 10^{-1} z + 1.2500 \cdot 10^{-1} z^2 \\
 b_{21} &= -2.6949 \cdot 10^{-4} + 5.0372 \cdot 10^{-4} z^2 - 2.2150 \cdot 10^{-4} z^2 \\
 b_{31} &= 0.0 \\
 b_{12} &= -3.1718 \cdot 10^{-3} + 2.9202 \cdot 10^{-3} z + 4.4411 \cdot 10^{-4} z^2 \\
 b_{22} &= 1.0593 \cdot 10^{-1} - 2.3067 \cdot 10^{-1} z + 1.2500 \cdot 10^{-1} z^2 \\
 b_{32} &= 0.0 \\
 b_{13} &= 0.0 \\
 b_{23} &= 0.0 \\
 b_{33} &= 1.0
 \end{aligned}$$

Tabelle A7.2 Parameter des rechten Polynommatrixquotienten zur Systemdarstellung des Extruders

Nr.	Pole	Nullstellen
1	.548680	.949053
2	.860622	.860580
3	.950356	.986917
4	.972815	.974376
5	.991910	
6	.983871	
7	.990324	

Tabelle A7.3 Pole und Nullstellen des Systems 7. Ordnung

Berufstätigkeit:

